Übungen zum Kompaktkurs

Iterative Gleichungssystemlöser
und Parallelisierung

Aufgabe 1: (Splitting-Methoden)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & 14 \\ 7 & 50 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{ \frac{49}{25} \right\}.$$

(a) Programmieren Sie das Gesamtschrittverfahren unter Verwendung des Templates

myjacobi.m.

Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten für $a = 1/2, 1, 2, 10, 100$ und beliebigem Startvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ durch Aufruf des Templates

Aufgabe1_Jac.m .

Bemerkung: Die Variation des Parameters a und des Startvektors $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ werden innerhalb der Datei **Aufgabe1_Jac.m** vorgenommen.

(b) Programmieren Sie das Einzelschrittverfahren unter Verwendung des Templates

mygs.m.

Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten für $a = 1/2, 1, 2, 10, 100$ und beliebigem Startvektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ durch Aufruf des Templates

Aufgabe1_GS.m .

Bemerkung: Die Variation des Parameters a und des Startvektors $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ werden innerhalb der Datei **Aufgabe1_GS.m** vorgenommen.

(c) Vergleichen Sie das Konvergenzverhalten des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens für verschiedene Parameterwerte durch Aufruf des Templates

Aufgabe1_Jac_GS.m .

Bemerkung: Die Variation des Parameters a und des Startvektors $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ werden innerhalb der Datei **Aufgabe1_Jac_GS.m** vorgenommen.

Aufgabe 2: (Splitting-Methoden)
Bestimmen Sie für das System

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Spektralradien der Iterationsmatrizen für das Gesamt- und Einzelschrittverfahren. Zeigen Sie, dass die Matrix konsistent geordnet ist und bestimmen Sie den optimalen Relaxationsparameter für das Einzelschrittverfahren.
Programmieren Sie das SOR-Verfahren unter Verwendung des Templates

mysor.m.

Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten für verschiedene Relaxationsparameter $0 < \omega < 2$ bei Verwendung des Startvektors $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0} \in I\!R^3$ durch Aufruf des Templates

Aufgabe2.m .

Bemerkung: Die Variation des Relaxationsparameters ω wird innerhalb von **Aufgabe2.m** vorgenommen. Zudem veranschaulicht das Programm **Aufgabe2.m** automatisch den Verlauf des Spektralradius der Iterationsmatrix des Einzelschrittverfahrens in Abhängigkeit vom Relaxationsparameter ω. Vergleichen Sie das Minimum mit dem von Ihnen berechneten Wert.
Hinweis: Für alle, die die Spektralradien nicht berechnen wollen:

$$\rho\,(M_J) = \sqrt{41/100}, \quad \rho\,(M_{GS}) = 41/100$$

Aufgabe 3: (Verfahren des steilsten Abstiegs, CG-Verfahren)
Gegeben seien die linearen Gleichungssysteme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 168 & 24 & 338 & 27 & 27 & 53 & -7 & 80 \\ 24 & 178 & 169 & 72 & 53 & -103 & 17 & 80 \\ 338 & 169 & 1177 & 192 & -62 & -108 & -48 & 180 \\ 27 & 72 & 192 & 125 & 2 & -24 & 36 & 180 \\ 27 & 53 & -62 & 2 & 222 & 70 & 46 & 100 \\ 53 & -103 & -108 & -24 & 70 & 178 & 34 & 100 \\ -7 & 17 & -48 & 36 & 46 & 34 & 34 & 100 \\ 80 & 80 & 180 & 180 & 100 & 100 & 100 & 400 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 229 \\ 129 \\ 790 \\ -214 \\ 106 \\ -276 \\ -216 \\ -600 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 71 & -1 & 23 & -36 & 70 & 60 \\ -1 & 161 & 102 & 33 & 40 & -120 \\ 23 & 102 & 135 & 18 & 110 & -60 \\ -36 & 33 & 18 & 35 & -22 & -60 \\ 70 & 40 & 110 & -22 & 148 & 24 \\ 60 & -120 & -60 & -60 & 24 & 144 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 187 \\ 194 \\ 360 \\ -45 \\ 432 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Programmieren Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs unter Verwendung des Templates

mygraddesc.m.

Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten durch Aufruf des Templates

Aufgabe3_Descent.m .

Bemerkung: Die Festlegung der beiden Gleichungssysteme erfolgt automatisch innerhalb von **Aufgabe3_Descent.m**. Die Steuerungsparameter zur maximalen Iterationszahl und des Abbruchkriteriums werden ebenfalls in **Aufgabe3_Descent.m** vorgenommen.

(b) Programmieren Sie das CG-Verfahren unter Verwendung des Templates

mycg.m.

Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten durch Aufruf des Templates

Aufgabe3_CG.m .

Bemerkung: Die Festlegung der beiden Gleichungssysteme erfolgt automatisch innerhalb von **Aufgabe3_CG.m**. Die Steuerungsparameter zur maximalen Iterationszahl und des Abbruchkriteriums werden ebenfalls in **Aufgabe3_CG.m** vorgenommen.

(c) Vergleichen Sie das Konvergenzverhalten des Verfahrens des steilsten Abstiegs und des CG-Verfahrens für verschiedene Parameter (Abbruchkriterium und Toleranz) durch Aufruf des Templates

Aufgabe3_Descent_CG.m .

Bemerkung: Die Festlegung der beiden Gleichungssysteme erfolgt automatisch innerhalb von **Aufgabe3_Descent_CG.m**. Die Steuerungsparameter zur maximalen Iterationszahl und des Abbruchkriteriums werden ebenfalls in **Aufgabe3_Descent_CG.m** vorgenommen.

Aufgabe 4: (CG-Verfahren)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$-u_{xx} - u_{yy} - au_x - bu = 0 \ \text{ auf } \ \Omega = (0,1) \times (0,1)$$

mit der Randbedingung

$$u = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega.$$

Das Gebiet $\overline{\Omega}$ wird durch $(x_i, y_j) = (i \cdot h, j \cdot h)$ mit $h = 1/100$, $i, j = 0, \ldots, 100$ diskretisiert und die auftretenden Differentialquotienten werden durch zentrale Differenzenquotienten gemäß

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \\
u_{yy}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \\
u_x(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}.
\end{aligned}$$

approximiert.
Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten ($\|\boldsymbol{r}_n\|_2$ über n) des CG-Verfahrens für das resultierende Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^N, \quad N = 99^2$$

mit

$$\boldsymbol{u} = (u_{1,1}, \ldots, u_{1,N}, u_{2,1}, \ldots, u_{2,N}, \ldots, u_{N,N})^T$$

bei stark variierenden Parametern $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und dem Startvektor $\boldsymbol{u}_0 = (1, \ldots, 1)^T$ durch Verwendung der von Ihnen in

mycg.m

programmierten Methode. Nutzen Sie beispielsweise

$$(a, b) = (0, 0), (a, b) = (0, 10), (a, b) = (10, 0), (a, b) = (10, 10), \text{ etc.}$$

Welche Eigenschaften hat die Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ in Abhängigkeit von a und b?
Bemerkung: Die Festlegung des entstehenden Gleichungssystems erfolgt automatisch innerhalb von

Aufgabe4.m.

Die Steuerung der Parametern $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ wird ebenfalls in **Aufgabe4.m** vorgenommen.

Aufgabe 5: (Mehrgitterverfahren)
Innerhalb des Templates

Aufgabe5.m.

ist für Sie bereits ein Zweigitterverfahren für die eindimensionale Poisson-Gleichung

$$u''(x) = k^2 \pi^2 sin(k \pi x)$$

mit relaxiertem Jacobi-Verfahren als Glätter, trivialer Restriktion und linearer Prolongation umgesetzt worden.
Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten für

(a) verschiedene Relaxationsparameter ω,

(b) verschiedene Kombinationen von Vor- und Nachglättungsschritte ν_1 respektive ν_2,

(c) verschiedene Frequenzen k innerhalb der rechten Seite $k^2 \pi^2 sin(k \pi x)$ der Differentialgleichung, besonders auch in Bezug auf die Gitterfeinheit, die mit dem Parameter l einhergeht, wobei durch $2^{(l+1)} - 1$ die Anzahl der inneren Knotenpunkte festgelegt wird.

Aufgabe 6: (Krylov-Unterraum-Verfahren)
Wir betrachten die bereits in Aufgabe 4 vorgestellte partielle Differentialgleichung inklusive des hierdurch resultierenden Gleichungssystems. Die Umsetzung der Diskretisierung ist bereits in den entsprechenden Hauptprogrammen **Aufgabe6_Name.m** realisiert.

(a) Programmieren Sie das BiCG-Verfahren unter Verwendung des Templates

mybicg.m.

Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten durch Aufruf des Templates

Aufgabe6_BICG.m .

Bemerkung: Die Steuerung der Parametern $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ wird ebenfalls in **Aufgabe6_BICG.m** vorgenommen.

(b) Programmieren Sie das CGS-Verfahren unter Verwendung des Templates

mycgs.m.

Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten im Vergleich zum BiCG-Verfahren durch Aufruf des Templates

Aufgabe6_BICG_CGS.m .

Bemerkung: Die Steuerung der Parametern $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ wird ebenfalls in **Aufgabe6_BICG_CGS.m** vorgenommen.

(c) Programmieren Sie das BiCGSTAB-Verfahren unter Verwendung des Templates

mybicgstab.m.

Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten im Vergleich zum BiCG- und zum CGS-Verfahren durch Aufruf des Templates

Aufgabe6_BICG_CGS_BICGSTAB.m .

Bemerkung: Die Steuerung der Parametern $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ wird ebenfalls in **Aufgabe6_BICG_CGS_BICGSTAB.m** vorgenommen.

(d) Studieren Sie das Konvergenzverhalten der Verfahren BiCG, CGS, BiCGSTAB, GMRES durch Aufruf des Templates

Aufgabe6_BICG_CGS_BICGSTAB_GMRES.m.

Bemerkung: Die Steuerung der Parametern $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ wird ebenfalls in **Aufgabe6_BICG_CGS_BICGSTAB_GMRES.m** vorgenommen.

(e) Studieren Sie das Konvergenzverhalten der Verfahren BiCG, CGS, BiCGSTAB, GMRES, GMRES(m) für $m = 25, 50, 75, 100$ durch Aufruf des Templates

Aufgabe6_BICG_CGS_BICGSTAB_GMRESm.m.

Bemerkung: Die Steuerung der Parametern $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ wird ebenfalls in **Aufgabe6_BICG_CGS_BICGSTAB_GMRESm.m** vorgenommen.