Numerische Methoden für inkompressible Strömungen und Aeroakustik

S. Roller[1], M. Ferch[2], C.-D. Munz[2], M. Dumbser[2]

Universität Stuttgart
[1]Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS)
www.hlrs.de
[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de

Die Gleichungen der Strömungsmechanik

- Das inkompressible Limit
- Methoden für inkompressible Strömungen
- Die Verbindung zur Aeroakustik
- Computational Aeroakustik (CAA)
- Bemerkungen

Die Gleichungen - Übersicht

Kompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie mit Reibung und Wärmeleitung

hyperbolisch – parabolisch

$\mathrm{Re} \to \infty$

$M = \frac{|v|}{c} \to 0$

Euler-Gleichungen	Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen
Gasdynamik	*parabolisch – elliptisch*
hyperbolisch	

Die Grundgleichungen

Kompressible Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla\cdot(\rho v) &= 0 \\ (\rho v)_t + \nabla((\rho v)\circ v) + \nabla p &= \nabla\tau \\ e_t + \nabla\cdot(v(e+p)) &= \nabla\cdot(\tau v) - \nabla\cdot q \\ + \text{equation of state } p &= p(\rho,\varepsilon) \end{aligned}$$

Inkompressible Navier-Stokes Gleichungen (Dichte + Temperatur konstant)

$$\begin{aligned} v_t + v\cdot\nabla v + \frac{1}{\rho}\nabla p &= \frac{1}{\rho\,\mathrm{Re}}\Delta v \\ \nabla\cdot v &= 0 \end{aligned}$$

Die kompressiblen Gleichungen

Kompressible Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla\cdot(\rho v) &= 0 \\ (\rho v)_t + \nabla((\rho v)\circ v) + \nabla p &= \nabla\tau \\ e_t + \nabla\cdot(v(e+p)) &= \nabla\cdot(\tau v) - \nabla\cdot q \\ + \text{equation of state } p &= p(\rho,\varepsilon) \end{aligned}$$

Was passiert mit der Zustandsgleichung?
Was passiert mit der Energiegleichung?

$$p_t + v\cdot\nabla p + \gamma p\nabla\cdot v = 0$$

Widerspruch Limit ist nicht so einfach!

Die Euler-Gleichungen in primitiven Variablen

Kompressible Euler-Gleichungen in primitiven Variablen

$$\begin{aligned} \rho_t + \rho\nabla\cdot v + v\cdot\nabla\rho &= 0 \\ v_t + (v\cdot\nabla)v + \frac{1}{\rho}\nabla p &= 0 \\ p_t + v\cdot\nabla p + \gamma p\nabla\cdot v &= 0 \end{aligned}$$

Inkompressible Euler-Gleichungen in primitiven Variablen

$$\begin{aligned} v_t + (v\cdot\nabla)v + \frac{1}{\rho}\nabla p &= 0 \\ \nabla\cdot v &= 0 \end{aligned}$$

Schwierigkeiten mit Low Mach Number Strömungen

Physikalische Überlegungen

$$\text{Low Mach Number Strömung}: \quad M = \frac{v}{c} \quad \text{klein}$$

Druckwellen werden sehr viel schneller als der Strömungstransport:
schneller Druckausgleich

- ➡ Druck nahezu konstant
- ➡ keine Dichteänderungen durch das Strömungsfeld

M=0: Inkompressible Gleichungen

Konsequenzen für die numerische Approximation

Eigenwerte $a_1 = v - c, \quad a_2 = v, \quad a_1 = v + c$

$$\text{Konditionszahl} \approx \frac{1}{M} \quad \text{für } M \to 0$$

$\Rightarrow$ Steifigkeit – Typwechsel der Gleichungen
Rein explizite numerische Methoden müssen versagen !!!!
Bedeutung der physikalischen Variablen ändert sich

Typ der inkompressiblen Gleichungen

$$v_t + v\cdot\nabla v + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho\,Re}\Delta v$$
$$\nabla\cdot v = 0$$

Konvektionsterme hyperbolisch	Durckterme elliptisch	Viskosität parabolisch

Geschwindigkeitsgleichung: Parabolisch – Konvektions-/Diffusionsgleichung
Divergenz-Bedingung: Elliptische Gleichung equation

Es gibt keine explizite Druckgleichung
Der Druck wird aus Gleichungen ohne Zustandsgleichung bestimmt
⇒ keine thermodynamische Bedeutung

Inhalt

- Das inkompressible Limit
- Methoden für inkompressible Strömungen
- Die Verbindung zur Aeroakustik
- Computational Aeroakustik (CAA)
- Bemerkungen

Numerische Methoden für inkompressible Strömungen

Inkompressible Navier-Stokes Gleichungen

$$v_t + v\cdot\nabla v + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho\,Re}\Delta v$$
$$\nabla\cdot v = 0$$

Problem: Keine Gleichung für den Druck

Konstruktion einer Druckgleichung:

$$v_t + v\cdot\nabla v + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho\,Re}\Delta v \qquad |\cdot\nabla$$
$$\Rightarrow\quad (\nabla\cdot v)_t + \nabla\cdot(v\cdot\nabla v) + \nabla\cdot\nabla p = \frac{1}{Re}\nabla\cdot\Delta v$$

Druck-Poisson Gleichung

Für eine gegebene Geschwindigkeit v erhält man den Druck aus

$$\nabla\cdot\nabla p = \frac{1}{Re}\nabla\cdot\Delta v - (\nabla\cdot v)_t - \nabla\cdot(v\cdot\nabla v)$$

elliptische Gleichung – Poisson Gleichung

Approximation im Raum I

$$v_t + v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho\,Re}\Delta v$$
$$\nabla \cdot v = 0$$

Konvektionsterme hyperbolisch | Durckterme elliptisch | Viskosität parabolisch

Konvektionsterme
Explizit in der Zeit ist möglich, upwind-differencing, wenn die Konvektion die Strömung dominiert ⇔ hohe Reynolds -Zahlen

Implizit in der Zeit und zentrale Differenzen im Raum
Problem: nichtlineare diskrete Gleichungen müssen gelöst werden

Approximation im Raum II

$$v_t + v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho\,Re}\Delta v$$
$$\nabla \cdot v = 0$$

Konvektionsterme hyperbolisch | Durckterme elliptisch | Viskosität parabolisch

Viskose Terme
Explizit in der Zeit und zentrale Differenz im Raum ist möglich, aber nur für hohe Reynolds-Zahlen, schwer in Kombination mit einem Turbulenzmodell, Zeitschritt-Beschränkung

Implizit in der Zeit und zentrale Differenz im Raum ist üblich

Approximation im Raum III

$$v_t + v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho\,Re}\Delta v$$
$$\nabla \cdot v = 0$$

Konvektionsterme hyperbolisch | Durckterme elliptisch | Viskosität parabolisch

Druckterme
Implizit in der Zeit
- vollimplizit – backward or implizit Euler 1. Ordnung genau
- Crank-Nicolson 2. Ordnung genau

Zeit und Raumdiskrete Gleichungen

$$\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} + (v \cdot \tilde{\nabla} v)^{n,n+1} + \tilde{\nabla} p^{n+1} = \frac{1}{Re}\tilde{\Delta} v^{n+1,n}$$
$$\tilde{\nabla} \cdot v^{n+1} = 0$$

1. Ordnung genau in der Zeit

Approximation im Raum: FD-, FE-, FV- Methoden möglich

Lösungsprozeduren:
- Direkter Zugang, direkte Lösung für v und p
- Druck-Korrektur-Schemata oder Projektionsmethoden
  - segregated approach – Druckgleichung gibt p, dann v berechnen
- Artificial compression – künstliche Kompression (stationäre Lösung)

Druck-Korrektur-Verfahren

1. Start mit einer Druckschätzung
2. Berechne die Geschwindigkeit aus der Geschwindigkeitsgleichung
3. Führe Korrekturen für Druck und Geschwindigkeit ein
4. Löse die elliptische Gleichung für die Druck-Korrektur
5. Berechne die korrigierte Geschwindigkeit

1. Starte mit einer Druckschätzung: p_g

2. Berechne die Geschwindigkeit aus der Geschwindigkeitsgleichung

$$\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t}+(v\cdot\tilde{\nabla}v)^{n,n+1}+\tilde{\nabla}p_g=\frac{1}{Re}\tilde{\Delta}v^{n+1,n}$$

Lösung eines linearen Systems von Gleichungen: v_g

Druck-Korrektur-Verfahren

3. Führe Korrekturen für Druck und Geschwindigkeit ein

$$p^{n+1}=p_g+\delta p,\quad v^{n+1}=v_g+\delta v$$

4. Löse die elliptische Gleichung für die Druck-Korrektur

$$\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t}+(v\cdot\tilde{\nabla}v)^{n,n+1}+\tilde{\nabla}p^{n+1}=\frac{1}{Re}\tilde{\Delta}v^{n+1,n}$$

$$-\quad\frac{v_g-v^n}{\Delta t}+(v_g\cdot\tilde{\nabla}v_g)+\tilde{\nabla}p_g=\frac{1}{Re}\tilde{\Delta}v_g$$

$$A\delta v=-\tilde{\nabla}(\delta p)$$

Geschwindigkeits-Druck Korrektur-Beziehung

Die Matrix enthält linearisierte Konvektions- und Dissipationsterme

Druck-Korrektur-Verfahren

Diskretisierte elliptische Druck-Korrektur-Gleichung erhält man aus der Divergenz-Bedingung

$$\tilde{\nabla}\cdot v^{n+1}=\tilde{\nabla}\cdot(v_g+\delta v)=0\quad\Leftrightarrow\quad\tilde{\nabla}\cdot\delta v=-\tilde{\nabla}\cdot(v_g)$$

Und die Geschwindigkeits-Druck-Korrektur-Beziehung

$$A\delta v=-\tilde{\nabla}(\delta p)$$

woraus folgt

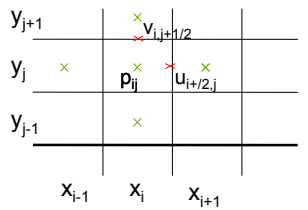
$$\tilde{\nabla}\cdot A^{-1}\tilde{\nabla}(\delta p)=\tilde{\nabla}\cdot v_g$$

Approximation von A^{-1} führt zu einer iterativen Prozedur die mit der Iteration der Druck-Korrektur-Gleichung kombiniert ist.

=> SIMPLE-Schema or SIMPLE-Typ-Verfahren
(**S**emi-**I**mplicit **M**ethod for **P**ressure **L**inked **E**quations)

Bemerkungen

1. **Segregated Approach:** Lösung der Druck-Gleichung, danach Bestimmung der Geschwindigkeit
2. Finite-Volume Schemata gehen von der Impulsgleichung aus, **kollokiertem Gitter (collocated grid),** Stabilisierung
3. Finite_Differenzen Schemata für die Inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in primitiven Variablen werden oft auf **versetztem Gitter (staggered grid)** formuliert



staggered grid

y-Geschwindigkeitskomponente
x-Geschwindigkeitskomponente

5-Punkte Laplace-Operator

Projektionsmethoden

Löse die Geschwindigkeitsgleichung ohne Druckterm

$$v_t + v \cdot \nabla v = \frac{1}{\rho \, Re} \Delta v$$

Das Ergebnis wird zerlegt in einen divergenzfreien Teil, die Geschwindigkeit v, und einen rotationsfreien Teil als Gradient eines Skalars, den Druck p

Wenn diese Dekomposition durch eine Druck-Korrektur-Iteration gelöst wird, ist das recht ähnlich zu eine SIMPLE-Typ-Verfahren

Artificial Compression für die incompressiblen NSE

(Chorin 1967)

$$v_t^{(0)} + \left(v^{(0)} \cdot \nabla\right) v^{(0)} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla p^{(2)} = \frac{1}{\rho^{(0)} \, Re} \Delta \cdot v,$$

$$\frac{1}{c^2} p_t^{(2)} + \nabla \cdot v^{(0)} = 0$$

hyperbolisches System

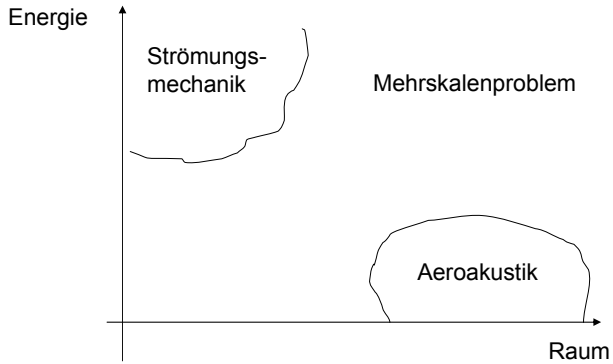
Stationary Lösung ist unverändert

Inhalt

- Das inkompressible Limit
- Methoden für inkompressible Strömungen
- Die Verbindung zur Aeroakustik
- Computational Aeroakustik (CAA)
- Bemerkungen

Der Link zur Aeroakustik

Schallentstehung und Schallausbreitung



Mehrskalen und Fernfeld-Lärm

Lärm: kleine Energieskala, große Raumskala

1 kHz 36 cm Wellenlänge

Strömung: große Energieskala, kleine Raumskala

Annahme: 1 Zeitskala, 2 Raumskalen

kleine Skala: Strömung

große Skala: Akustik

Lighthill's Akustische Analogie

$\frac{\partial}{\partial t}\Big|$ $\quad \rho_t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$

$\nabla\cdot\Big|$ $\quad (\rho v)_t + \nabla\cdot((\rho v)\circ v) + \nabla p = \nabla\cdot\tau$

$-c_0^2\Delta\rho\Big|$ $\quad \rho_{tt} - \Delta p = \nabla\cdot\nabla\cdot((\rho v)\circ v) + \nabla\cdot(\nabla\cdot\tau)$

$$\rho'_{tt} - c_0^2\Delta\rho' = \nabla\cdot\nabla\cdot((\rho v)\circ v) + (p - c_0^2\rho) + \nabla(\nabla\cdot\tau)$$

Ausbreitung Erzeugung

Lighthill's Akustische Analogie

M **<< 1**

Schallerzeugung

inkompressible Navier-Stokes Gleichungen

Schallausbreitung

Lineare Wellengleichungen

Schallquelle

Lighthill-Tensor

Erweiterungen

FWH-Gleichungen, Lilley, Curle, Möhring, ...

Störungsansätze (Perturbation Methods)

$u_t + A(u)u_x = 0$ kompressible Gleichungen

Störungsansatz

$$u'_t + A(u_0 + u')u'_x = -u_{0,t} - A(u_0 + u')u_{0,x}$$

Keine nichtlinearen akustischen Effekte $\Downarrow$ $A(u_0)$

$\Downarrow$ $A(u_0)$ Kein Einfluß der akustischen Wellen auf die Strömung

Linearisierte Euler-Gleichungen

Störungsansätze (Perturbation Methods)

$$u'_t + A(u_0)\,u'_x = -u_{0,t} - A(u_0)\,u_{0,x}$$

Linearisierte Euler-Gleichung

u' ist gleich den akustischen Fluktuationen, wenn

u_0 das reine hydrodynamische Strömungsfeld

$$u'_t + A(u_0)\,u'_x = -u_{0,t} - A(u_0)\,u_{0,x}$$

Schallausbreitung — Schallentstehung

Skalierte Entwicklung um die Inkompressible Strömung (Scaled Expansion about Incompressible Flow – EIF)

Isentrope Strömung

$$\rho = \rho_0 + M^2\rho^{inc} + M^2\rho'$$
$$v = v^{inc} + Mv'$$
$$p = p_0 + M^2 p^{inc} + M^2 p'$$

inkompressible Lösung: $v^{inc}, p^{inc}, \rho^{inc} := p^{inc}/c_0^2,$
thermodynamische Variablen: ρ_0, p_0

Scaled EIF - Equations

$$\rho'_t + v^{inc}\cdot\nabla\rho' + \frac{\rho_0}{M}\nabla\cdot v' = -\rho_t^{inc} - v^{inc}\cdot\nabla\rho^{inc}$$

$$v'_t + (v^{inc}\cdot\nabla)v' + (v'\cdot\nabla)v^{inc} + \frac{1}{\rho_0 M}\nabla p' = 0$$

$$p'_t + v^{inc}\cdot\nabla p' + \frac{\gamma p_0}{M}\nabla\cdot v' = -p_t^{inc} - v^{inc}\cdot\nabla p^{inc}$$

linearisierte Euler-Gleichungen — Quellterme

Inhalt

- Das inkompressible Limit
- Methoden für inkompressible Strömungen
- Die Verbindung zur Aeroakustik
- Computational Aeroakustik (CAA)
- Bemerkungen

Computational Aeroacoustics (CAA)

Fernfeld: Frequenzraum

Nahes Fernfeld und Strömungsregion: Rechnungen im Zeitraum

Störungsansätze scheinen sehr interessant

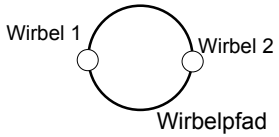
FWH ist üblicher Ansatz

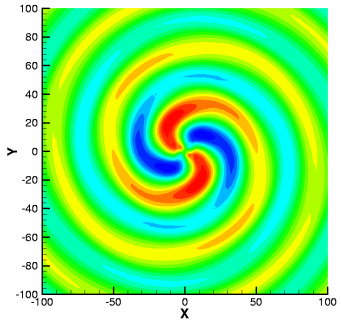
Notwendig: Numerische Methoden mit geringer Dissipation und Dispersion ⇔ high order Verfahren

Kompressible CFD-Löser zerstören die akustischen Wellen schon über kurze Strecken

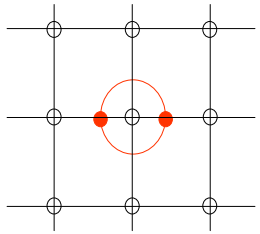
Numerische Beispiele

Gleichsinnig rotierendes Wirbelpaar
Co-Rotating Vortex Pair



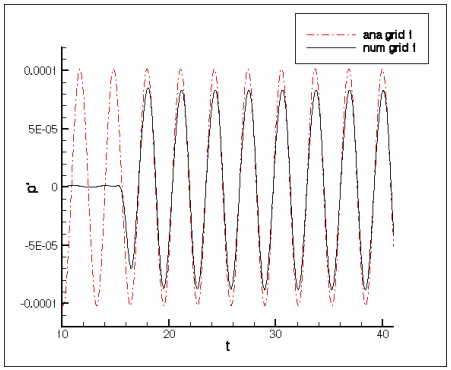


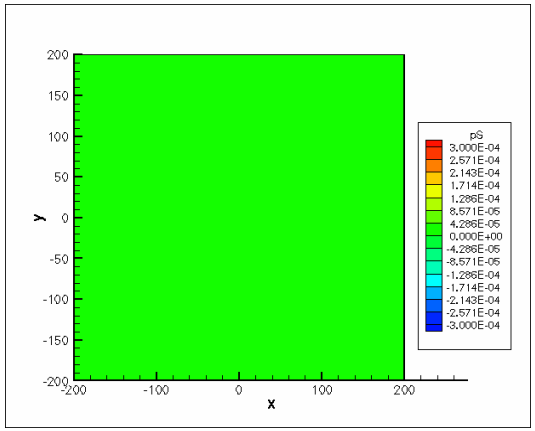
Numerische Ergebnisse des EIF-Verfahrens

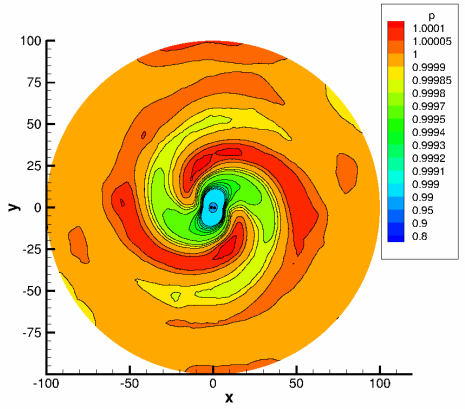


Wirbelzentrum

Gitterpunkt



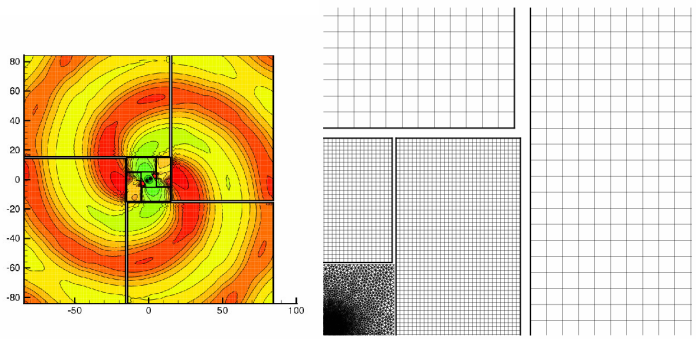




Vorgehensweise bei CAA-Verfahren

Löse die akustische Wellengleichung auf einem groben Gitter mit Quelltermen in der Strömungsregion

Heterogeneous Domain Decomposition



Bemerkungen

Inkompressible Gleichungen

Standardmethoden: Druck-Korrektur-Schemata

Raum-Diskretisierung: FV- and FE-Methoden

Schwach kompressible Strömungen

sehr viel mehr Rechenzeit: Low Mach Number ist immer noch ein schwieriges Problem

Aeroacoustic

aktives Forschungsgebiet, Zeitraum-Methoden, Schallentstehung aus turbulenter Strömung LES für Turbulenz

Bücher

Numerische Gasdynamik

C.Hirsch: Numerical Computation of internal and external flow, Vol I,II, John Wiley and Sons 1988

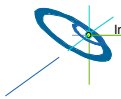
Standardwerk

K. A. Hoffmann, S. T. Chiang: Computational Fluid Dynamics for Engineers, Vol. I,II

gut zu lesen

C. B. Laney: Computational Gasdynamics, Cambridge University Press 1998

P. Wesseling: Principles of Computational Fluid Dynamics, Springer-Verlag 2000



Inkompressible Strömungen

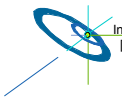
J.H. Ferziger, M. Peric: Computational Methods for Fluid Mechanics, Springer 1996

S.V. Patankar: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc Graw-Hill 1980

Klassiker

Allgemein

J. F. Wendt: Computational Fluid Dynamics, An Introduction, Springer-Verlag 1996

D. A. Anderson, J. C. Tannehill, R. H. Pletcher: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere 1984

H. Oertel, E. Laurien: Numerische Strömungsmechanik Vieweg Verlag