Finite Volumen Verfahren in mehreren Raumdimensionen

S. Roller[1], M. Ferch[2], C.-D. Munz[2], M. Dumbser[2]

Universität Stuttgart
[1]Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS)
www.hlrs.de
[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de

Die Gleichungen der Strömungsmechanik

- Motivation
- Modellierung
- Erhaltungsgleichungen
- Die Gleichungen einer kompressiblen Strömung
- Die Gleichungen einer inkompressiblen Strömung

FV-Schemes in Multi Dimensions

Zweidimensionale Euler Gleichungen

$$u_t + f_1(u)_x + f_2(u)_y = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ e \end{pmatrix} \quad f_1(u) = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ v_1(e+p) \end{pmatrix} \quad f_2(u) = \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ v_2(e+p) \end{pmatrix}$$

Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \ , \qquad e = \rho\varepsilon + \tfrac{1}{2}\rho\left(v_1^2 + v_2^2\right)$$

Quasilineare Form

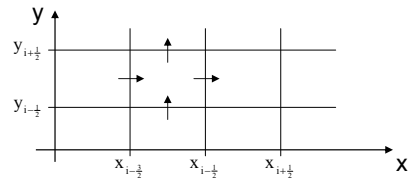
$$u_t + Au_x + Bu_y = 0$$

mit $$A(u) = \frac{df_1(u)}{du} \ , \qquad B(u) = \frac{df_2(u)}{du}$$

Eigenwerte

$$a_1 = v_1 - c \, , \quad a_2 = a_3 = v_1 \, , \quad a_4 = v_1 + c$$
$$b_1 = v_2 - c \, , \quad b_2 = b_3 = v_2 \, , \quad b_4 = v_2 + c$$

FV-Schemes auf einem kartesischen Gitter



$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+\frac{1}{2},j} - g_{i-\frac{1}{2},j}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(h_{i,j+\frac{1}{2}} - h_{i,j-\frac{1}{2}}\right)$$

$g_{i+\frac{1}{2},j} = g(u_{i,j}, u_{i+1,j})$ Fluß in x-Richtung

$h_{i,j+\frac{1}{2}} = g(u_{i,j}, u_{i,j+1})$ Fluß in y-Richtung

2nd order accuracy: MUSCL - scheme

FV-Schemes auf allgemeinen Gittern

Erhaltungsgleichung

$$u_t + \nabla \cdot f(u) = 0 \text{ in } D \times [0,T]$$

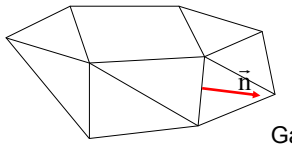
Gitter $D = \bigcup \overline{C}_j, \quad C_j \cap C_k = \Phi$ für $j \neq k$

Rand ∂C_j stückweise glatt

Integration über $C_j x[t_n,t_{n+1}]$

$$|C_j| u_j^{n+1} = |C_j| u_j^{n} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial C_j} f(u(x,t)) \cdot \vec{n} \, dS \, dt$$

FV-Schemes auf allgemeinen Gittern



$$u_j^{n+1} = u_j^{n} - \frac{\Delta t}{|C_j|} \sum_k \int_{\partial C_j^k} f_n(C_j, C^{k*}) dS$$

Gauß Quadratur

Numerischer Fluß in Normalenrichtung

Flußberechnung in Normalenrichtung:

Die Rotationssymmetrie der Euler-Gleichungen ermöglicht es, die eindimensionalen Flußberechnungen zu benutzen

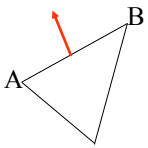
Lokales Koordinatensystem: Normal- und Tangentialgeschwindigkeits-komponenten

Berechnung des Flusses in Normalenrichtung

$$F_{AB} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{A}^{B} \left(n_1 f_1(u) + n_2 f_2(u)\right) ds \, dt$$

Ausnutzen der Rotationssymmetrie der Euler-Gleichungen

$$n_1 f_1(u) + n_2 f_2(u) = T^{-1} f_1(Tu)$$



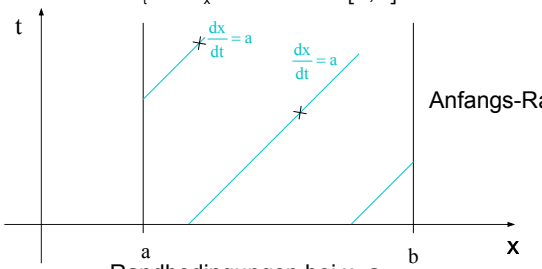
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & 0 \\ 0 & -n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation

Randbedingungen

Lineare Advektionsgleichung

$u_t + a \cdot u_x = 0$ in $[a,b] \times \Re$ $a > 0$



Anfangs-Randwert-Problem

Randbedingungen bei x=a

Kompatibilitätsbedingung bei x=b

Numerische Approximation mit Upwind-Schema

a>0: $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot a \cdot \left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)$

Randwerte sind nur bei x=a nötig

$\cong$ physikalische Situation

Upwind-Schemata schließen automatisch die Physik ein

Lineare Systeme

$u_t + A \cdot u_x = 0$, A $m \times m$ matrix

Eigenwerte:

$a_1 < a_2 < \ldots < a_J < 0 \le a_{J+1} < \ldots < a_m$

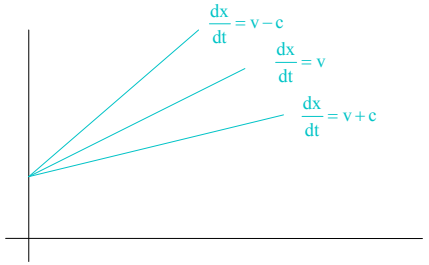
Linker Rand: x=a

J Randbedingungen

m - J Kompatibilitätsbedingungen

Randbedingungen für die Euler-Gleichungen

1. Supersonische Einströmung (Inflow)



Rand

$C_+ : \frac{dx}{dt} = v + c$

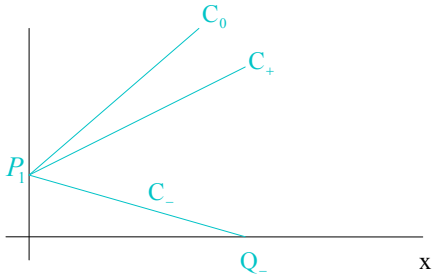
$C_0 : \frac{dx}{dt} = v$

$C_- : \frac{dx}{dt} = v - c$

3 Randwerte werden benötigt

Randbedingungen für die Euler-Gleichungen

2. Subsonische Einströmung (Inflow)



2 Randwerte, z.B. ρ, v

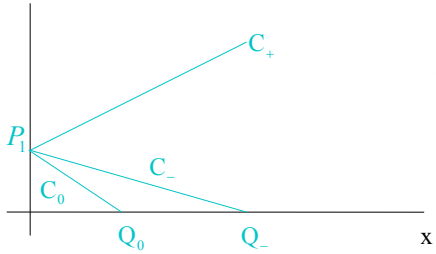
1 Kompatibilitätsbedingung

$$\left(v-\frac{2c}{\gamma-1}\right)_{P_1}=\left(v-\frac{2c}{\gamma-1}\right)_{Q_-}$$

Charakteristische Theorie

Randbedingungen für die Euler-Gleichungen

3. Subsonische Ausströmung (Outflow)



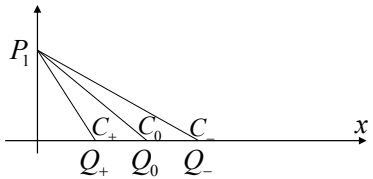
1 Randwerte

2 Kompatibilitätsbedingung

$$\left(\frac{p}{\rho\gamma}\right)_{P_1}=\left(\frac{p}{\rho\gamma}\right)_{Q_0}$$

Randbedingungen für die Euler-Gleichungen

3. Supersonische Ausströmung (Outflow)



3 Kompatibilitätsbedingungen

$$\left(v+\frac{2c}{\gamma-1}\right)_{P_1}=\left(v+\frac{2c}{\gamma-1}\right)_{Q_+}$$

Bemerkung „Randbedingungen“

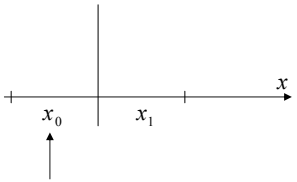
Upwind-Schemata berücksichtigen üblicherweise die physikalische Situation, die richtige Information wird automatisch mit einbezogen. Die Zahl der Randbedinungen werden durch die Physik vorgegeben.

Nicht-physicalische oder künstliche Randbedingungen:

Nicht-reflektierende Randbedingungen, Reduktion der Größe des Rechengebiets

Charakteristische Randbedingungen werden üblicherweise nur für zentrale Differenzen benötigt.

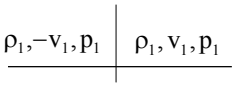
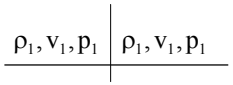
Praktische Implementierung



Dummy-
Gitterzelle

Spezifiziere geeignete Werte in der Dummy-Gitterzelle

Wand



nicht-reflektierend