Verfahren höherer Ordnung

S. Roller[1], M. Ferch[2], C.-D. Munz[2], M. Dumbser[2]

Universität Stuttgart
[1]Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS)
www.hlrs.de
[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de

Verfahren höherer Ordnung

- ENO/WENO
- Discontinous Galerkin (DG)
- ADER

ENO/WENO Verfahren

Idee:

MUSCL: Benutze stückweise lineare Rekonstruktion der Daten um Genauigkeit 2. Ordnung zu bekommen
Für die Steigungsberechnung werden Limiter benötigt

ENO: Benutze stückweise polynomiale Reconstruktionen um höhere Ordnung zu bekommen
Auswahlkriterien nötig, welches Polynom benutzt wird

WENO: Benutze alle möglichen Polynome in gewichteter Form

Godunov's Theorem

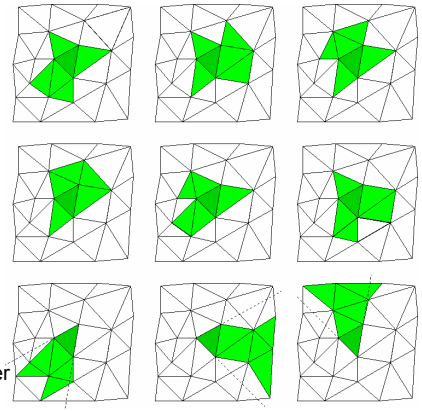
Godunov's Theorem:

Ein lineares monotones Schema kann nicht besser als 1. Ordnung genau sein.

Monotone Schemata von höherer Ordnung benötigen eine Form von Nichtlinearität (Datenabhängigkeit) in ihrer Konstruktion um das oben erwähnte Theorem zu umgehen. Für FV-Verfahren 2. Ordnung liegt die Nichtlinearität in der Limiterfunktion, für ENO/WENO-Verfahren in der Stencil-Auswahl, die datenabhängig unter Berücksichtigung von Glattheitskriterien durchgeführt wird.

Stencil Auswahl

Die Auswahl des Stencils is der einzige Teil, der stark vom Typ des gewählten Gitters abhängt.



Anforderungen:

- Die Anzahl der Stencils sollte niedrig sein um die Rechenkosten gering zu halten
- Die Stencils sollten klein im Durchmesser und zentriert sein, um hohe Ordnung zu erhalten
- einseitige Stencils sollten für unstetige Daten ebenfalls benutzt werden (im WENO-Ansatz werden sie benutzt, um Interpolationen über Unstetigkeiten zu verhindern)

Auswahl auf Dreiecksgittern:

- Folgen von benachbarten Dreiecken
- sectorial search

WENO Rekonstruktion

Das Rekonstruktionspolynom erhält man durch eine gewichtete Summe von rekonstruierten Polynomen:

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i p_i(x,y)$$

Die Gewichte ω hängen von der Glattheit der rekonstruierten Polynome $p_i(x,y)$ ab.

WENO Rekonstruktion

Ein geeigneter Oszillationsindikator ist gegeben durch:

$$S(p_i) = \sum_{1 \le i+j \le n} \int_T |T|^{(i+j)-1} \left(D^{i,j} p(x,y)\right)^2 dx\, dy$$

Und wird zur Berechnung des nichtlinearen Gewichts benutzt

$$\omega_i = \frac{\tilde{\omega}_i}{\sum_{j=1}^{k} \tilde{\omega}_j} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{\omega}_i = \frac{1}{(\varepsilon + S(p_i))^r}$$

Typischerweise wird $\varepsilon = 10^{-4}$ und $r = 4$ gewählt.

Integration in der Zeit üblicherweise mit Runge-Kutta-Verfahren.

ADER Ansatz nach Toro

Ziel: Erweiterung des MUSCL-Ansatzes auf Ordnungen höher als 2

Idee: Interpolation in Raum **und** Zeit gleichzeitig

Problem: Für Zeitableitungen werden mehrere Zeitschichten benötigt

Lösung: Sukzessives Ersetzen der Zeitableitungen durch Raumableitungen (Lax-Wendroff-Prozedur, Cauchy-Kowalewski-Prozedur)

Beispiel: Skalare Transportgleichung $u_t + a u_x = 0$

$$u_{tt} = (u_t)_t = (-a u_x)_t = -a u_{xt} = -a u_{tx} = -a(u_t)_x = -a(-a u_x)_x = a^2 u_{xx}$$

Discontinous Galerkin Finite Element Methode

Die Euler-Gleichungen lauten

$$u_t + \mathrm{div}(F) = 0 \qquad u=[\rho\ u\ v\ w\ p]^T \qquad F=[Au\ Bu\ Cu]$$

Repräsentation des Zustandsvektors u in Basisfunktionen Φ

$$u(x,t) = \hat{u}_0(t)\Phi_0(x) + \hat{u}_1(t)\Phi_1(x) + \ldots + \hat{u}_N(t)\Phi_N(x)$$

$$u(x,t) := \hat{u}_l(t)\Phi_l(x)$$ Index-Notation: Summation von l = 1 bis N

Discontinous Galerkin Finite Element Methode

Multiplikation mit Testfunktionen Ψ_k

$$\iiint_\Omega \Psi_k \cdot u_t dV + \iiint_\Omega \Psi_k \cdot div(F) dV = 0$$

und partielle Integration

$$\iiint_\Omega \Psi_k \cdot u_t dV + \oiint_{\partial\Omega} \Psi_k F^h \cdot \vec{n}\, dS - \iiint_\Omega F\, grad(\Psi_k) dV = 0$$

Einsetzden er Entwicklung für *u* and ein numerischer Fluß F^h an den Zellgrenzen gibt die semi-diskrete Version des DG-Schemas. Der numerische Fluß kann ein exakter oder approximativer Riemannlöser sein.

Discontinous Galerkin Finite Element Methode

Beispiel: Skalare Transportgleichung

$$u_t + a u_x = 0$$

mit dem numerischen Fluß (upwind, 1st order)

$$f^*_{i+\frac{1}{2}}\left(u^i, u^{i+1}\right) = a u^i$$

Finite Element Scheme

$$\int_\Omega \Psi_k \cdot u_t dV + \int_\Omega \Psi_k f^h_x = 0$$

$$\int_\Omega \Psi_k \cdot u_t dV + \oint_{\partial\Omega} \Psi_k f^h \cdot \vec{n}\, dS - \int_\Omega f \cdot (\Psi_k)_x dV = 0$$

Repräsentation of u als

$$u(x,t) := \sum_{l=0}^{N} \hat{u}_l(t)\Phi_l(x)$$

Discontinous Galerkin Finite Element Methode

Mit der Wahl $\Psi=\Phi$ und dem Einsetzen der Entwicklung für u vereinfacht sich das Schema zu

$$\int_\Omega \Phi_k \cdot u_t dV + \oint_{\partial\Omega} \Phi_k f^h \cdot \vec{n}\, dS - \int_\Omega f \cdot (\Phi_k)_x dV = 0$$

$$\int_\Omega \Phi_k \cdot u_t dV + (\Phi_k a u)_{i+½} - (\Phi_k a u)_{i-½} - \int_\Omega a u \cdot (\Phi_k)_x dV = 0$$

$$\int_\Omega \Phi_k \cdot \left(\sum \hat{u}_l \Phi_l\right)_t dV + \left(\Phi_k a \sum \hat{u}_l \Phi_l\right)_{i+½} - \left(\Phi_k a \sum \hat{u}_l \Phi_l\right)_{i-½} - \int_\Omega a \sum \hat{u}_l \Phi_l \cdot (\Phi_k)_x dV = 0$$

$$\sum \left(\int_\Omega \Phi_k \cdot (\hat{u}_l \Phi_l)_t dV + (\Phi_k a \hat{u}_l \Phi_l)_{i+½} - (\Phi_k a \hat{u}_l \Phi_l)_{i-½} - \int_\Omega a \hat{u}_l \Phi_l \cdot (\Phi_k)_x dV \right) = 0$$

$$\sum \left(\int_\Omega \Phi_k \cdot (\hat{u}_l \Phi_l)_t dV + a \hat{u}^i_l \Phi_k\left(\tfrac{\Delta x}{2}\right)\Phi_l\left(\tfrac{\Delta x}{2}\right) - a \hat{u}^{i-1}_l \Phi_k\left(-\tfrac{\Delta x}{2}\right)\Phi_l\left(\tfrac{\Delta x}{2}\right) - \int_\Omega a \hat{u}_l \Phi_l \cdot (\Phi_k)_x dV \right) = 0$$

Discontinous Galerkin Finite Element Methode

In Indexnotation schreibt sich das Verfahren

$$\int_\Omega \Phi_k \Phi_l \left(\hat{u}_l^i\right)_t dx + a\Phi_k\left(\tfrac{\Delta x}{2}\right)\Phi_l\left(\tfrac{\Delta x}{2}\right)\hat{u}_l^i - a\Phi_k\left(-\tfrac{\Delta x}{2}\right)\Phi_l\left(\tfrac{\Delta x}{2}\right)\hat{u}_l^{i-1} - \int_\Omega a\left(\Phi_k\right)_x \Phi_l \hat{u}_l^i dx = 0$$

Zusammengefaßt zu der gewöhnlichen DGL

$$M_{kl}\left(\hat{u}_l^i\right)_t + a \cdot F_{kl}^r \hat{u}_l^i - a \cdot F_{kl}^l \hat{u}_l^{i-1} - a \cdot K_{kl} \hat{u}_l^i = 0 \qquad \textbf{(ODE)}$$

mit:

Masse-Matrix

$$M_{kl} = \int_\Omega \Phi_k \Phi_l dx$$

Steifigkeits-Matrix

$$K_{kl} = \int_\Omega \left(\Phi_k\right)_x \Phi_l dx$$

Right Flux Matrix

$$F_{kl}^r = \Phi_k\left(\tfrac{\Delta x}{2}\right)\Phi_l\left(\tfrac{\Delta x}{2}\right)$$

Left Flux Matrix

$$F_{kl}^l = \Phi_k\left(-\tfrac{\Delta x}{2}\right)\Phi_l\left(\tfrac{\Delta x}{2}\right)$$

Integration der (ODE) in der Zeit mit einem klassischen Runge-Kutta Schema

⇒ **Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methode**