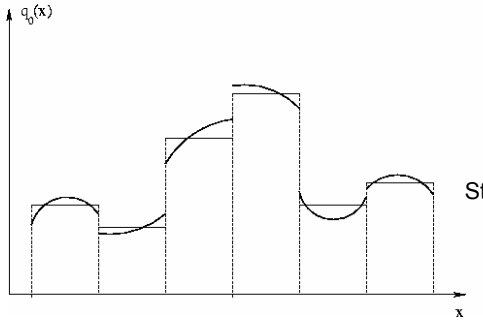
Verfahren 2. Ordnung: Der MUSCL-Ansatz

S. Roller[1], M. Ferch[2], C.-D. Munz[2], M. Dumbser[2]

Universität Stuttgart
[1]Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS)
www.hlrs.de
[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de

Höhere Ordnung: Rekonstruktion

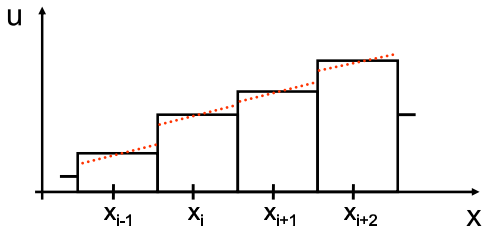
Berechne lokale Werte an den Gitterzellgrenzen aus den integralen Mittelwerten



Stückweise polynomial

Stückweise lineare Rekonstruktion

MUSCL-Idee (van Leer, 1978)
Monotonic **U**pwind **S**cheme for **C**onservation **L**aws



Steigungsberechnung: TVD Eigenschaft (Total Variation Diminishing), Skalare mathematische Theorie, erweitert auf Systeme

MUSCL-Schema

1. Stückweise lineare Rekonstruktion
   2. Ordnung im Raum
2. Zeit-Update zu $t_{n+1/2}$
   2. Ordnung in der Zeit
3. Godunov-Typ Flußberechnung

Commercial codes: FLOWer, TAU, ...

MUSCL-Prozedur

Randwerte zu t_n $\quad u_{i\pm}^{n} = u_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} s_i^n$ ← Steigung s_i^n

$t_n \rightarrow t_{n+1/2}$ $\quad u_{i\pm}^{n+1/2} = u_{i\pm}^{n} - \frac{\Delta t}{2\cdot\Delta x}\left(f\left(u_{i+}^{n}\right) - f\left(u_{i-}^{n}\right)\right)$

FV-Schema: $\quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^{n+1/2} - g_{i-1/2}^{n+1/2}\right)$

mit $\quad g_{i+1/2}^{n+1/2} = g\left(u_{i+}^{n+1/2}, u_{(i+1)-}^{n+1/2}\right)$

Steigungsberechnung

Mathematische Theorie für skalare Erhaltungsgleichungen
TVD-Eigenschaft (Total Variation Diminishing)

$$\sum_{\text{all i}} \left| u_{i+1}^{n} - u_i^{n} \right| \le \sum_{\text{all i}} \left| u_{i+1}^{0} - u_i^{0} \right|$$

Hinreichende Bedingung (A. Harten)

$$0 \le \left\{ \frac{\Delta x\, s_i}{u_i - u_{i-1}}, \frac{\Delta x\, s_i}{u_{i+1} - u_i} \right\} \le 2$$

Steigungsberechnung, Beispiele

1. Minmod-function

$$s_i = \frac{1}{\Delta x}\,\text{minmod}\left(u_{i+1} - u_i\,,\, u_i - u_{i-1}\right)$$

$$\text{minmod}(a,b) = \begin{cases} a & \text{für } |a| < |b|, ab > 0 \\ b & \text{für } |a| \ge |b|, ab > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sweby's slope calculation

$$s_k(a,b) = \text{sign}(a)\,\max\left\{ \left|\text{minmod}(a, kb)\right|, \left|\text{minmod}(ka, b)\right| \right\}$$
$$\text{mit} \quad 1 \le k \le 2$$