Approximative Riemannlöser und andere Flußfunktionen

S. Roller[1], M. Ferch[2], C.-D. Munz[2], M. Dumbser[2]

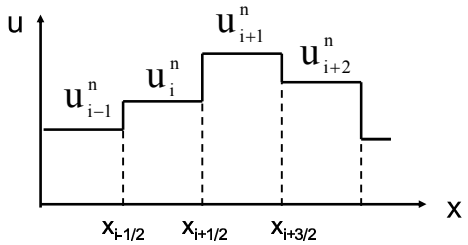
Universität Stuttgart
[1]Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS)
www.hlrs.de
[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de

Inhalt

Die Berechnung des numerischen Flusses

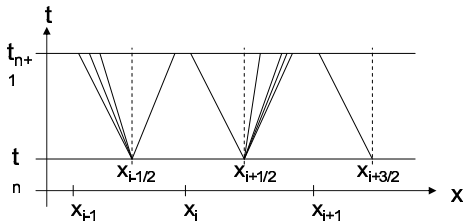
1. Die Idee von Godunov
2. Vereinfachungen: Approximative Riemannlöser
3. Das Roe-Verfahren
4. Das HLL-Verfahren

Godunov's Idee in einer Raumdimension



Stückweise konstante Werte in jeder Zelle
Löse Riemann-Problem an jeder Zellkante

Formulierung als Finite Volumen Verfahren



$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g^n_{i+1/2} - g^n_{i-1/2}\right)$$ FV-scheme

$$g^n_{i+1/2} = f\left(u_{RP}(0; u_i, u_{i+1})\right)$$

Die Methode von Godunov

Numerischer Fluß der Godunov-Methode:

$$g^{n}_{i+1/2} = f(u_{RP}(0; u_i, u_{i+1}))$$

u_{RP}: Lösung des Riemann-Problem an der Zellkante

Eigenschaften des Godunov-Verfahrens:

- Exakte Erhaltung
- Nichtlineare Wellenausbreitung
- Adaptivität

Stabilität: CFL-Bedingung

Die Roe Linearisierung

P. Roe (1981): Ersetze die exakte Lösung durch die exakte Lösung des folgenden linearisierten Riemann Problems:

$$u_t + A_{lr} u_x = 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_l \text{ für } x < 0 \\ u_r \text{ für } x > 0 \end{cases}$$

Die Matrix $A_{lr} = A_{lr}(u_l, u_r)$ heißt Roe-Matrix, wenn

1. $A_{lr}(u,u) = A(u)$
2. A_{lr} ist diagonalisierbar (d.h. hyperbolisch)
3. A_{lr} erfüllt die Mittelwertseigenschaft:
   $f(u_r) - f(u_l) = A_{lr}(u_r - u_l)$

Fluß und Jacobi-Matrix für die 1D Euler-Gleichungen

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_t + A(u) u_x = 0$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix} \qquad A(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} v^2 & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ v\left(\frac{\gamma-1}{2} v^2 - H\right) & H-(\gamma-1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{e+p}{\rho}, \quad c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad p = (\gamma-1)\left(e - \tfrac{1}{2}\rho v^2\right)$$

Eigenwerte: $a_1 = v-c$, $a_2 = v$, $a_3 = v+c$

Übung: Herleiten der Roe-Mittelwerte

$$f(u_r) \quad - \quad f(u_l) \quad = \quad A(\bar{u})$$

$$\begin{pmatrix} \rho_r v_r \\ \rho_r v_r^2 + p_r \\ v_r(e_r + p_r) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_l v_l \\ \rho_l v_l^2 + p_l \\ v_l(e_l + p_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}\bar{v}^2 & (3-\gamma)\bar{v} & \gamma-1 \\ \bar{v}\left(\frac{\gamma-1}{2}\bar{v}^2 - \bar{H}\right) & \bar{H}-(\gamma-1)\bar{v}^2 & \gamma\bar{v} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $a_1 = v-c$, $a_2 = v$, $a_3 = v+c$

Roe-Mittelwerte für ein ideales Gas

Roe-Matrix $A_{lr}(u_l, u_r) = A(\bar{u})$

mit $\bar{\rho} = \frac{\rho_r + \rho_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}$ $\bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_r} v_r + \sqrt{\rho_l} v_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}$,

$\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_r} H_r + \sqrt{\rho_l} H_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}$, $\bar{c}^2 = (\gamma - 1)\left(\bar{H} - \frac{1}{2}\bar{v}^2\right)$

System von linearen Transportgleichungen

Die Matrix A ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Matrix R mit:

$$\Rightarrow \quad \Lambda = R^{-1} A R = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots a_m)$$

Ähnlichkeits-transformation

R ist die Matrix der Eigenvektoren: $R=(r_1, \ldots, r_m)$
r_i Eigenvektor zum Eigenwert a_i, d.h. $A\, r_i = a_i\, r_i$

Warum Linearisierung?

Antwort: $R^{-1} \cdot \left| \quad u_t + A\, u_x = 0 \right.$

$$R^{-1} u_t + R^{-1} A\, u_x = 0$$
$$R^{-1} u_t + R^{-1} A R R^{-1} u_x = 0$$
$$(R^{-1} u)_t + \underbrace{R^{-1} A R}_{\Lambda} (R^{-1} u)_x = 0$$

$w = R^{-1} u$ charakteristische Variablen

$w_t + \Lambda w_x = 0$ charakteristische Normalform

m entkoppelte SKALARE lineare Transportgleichungen

Lösung des linearisierten Riemann-Problems

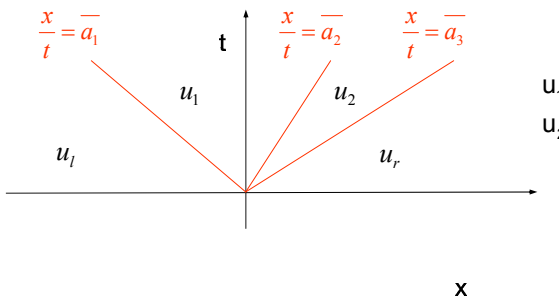
1.Transformation: $u_r - u_l = R(w_r - w_l)$, $u_r - u_l = \sum_{i=1}^{3} \gamma_j r_j$

=> Bestimmung der γ

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2\bar{c}}\left[\Delta m_l - \Delta\rho(\bar{v}_l + \bar{c})\right] - \frac{1}{2}\gamma_2$$
$$\gamma_2 = -\frac{\gamma - 1}{\bar{c}^2}\left[\Delta\rho\left(\bar{v}_l^{\,2} - H\right) - \bar{v}_l \Delta m_l + \Delta e\right]$$
$$\gamma_3 = \Delta\rho - \gamma_1 - \gamma_2$$

Lösung des linearisierten Riemann-Problems

2. Die vier konstanten Zustände



$u_1 = u_l + \gamma_1 r_1$

$u_2 = u_l + \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2$

Numerischer Fluß des Roe-Schemas

Damit erhält man

$$g_{i+\frac{1}{2}} = f(u_i) + \sum_{j=1}^{3} a_j^- \gamma_j r_j$$

$$g_{i+\frac{1}{2}} = f(u_{i+1}) - \sum_{j=1}^{3} a_j^+ \gamma_j r_j$$

Üblicherweise nimmt man den Mittelwert

$$g_{Roe}(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} |a_j| \gamma_j r_j$$

Zentrale Differenz — Korrektur gemäß Wellenausbreitung

Eigenschaften des Roe-Schemas

Eine einzelne Stoßwelle oder eine einzelne Kontaktunstetigkeit wird exakt aufgelöst.

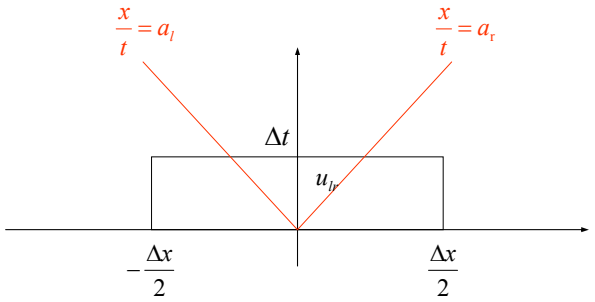
Das Roe-Verfahren kann an starken Verdünnungen die Konsistenz mit der Entropiebedingung verletzen.

Unterschätzen der Wellengeschwindigkeiten an Verdünnungen.

Entropy-fix: $\tilde{a}_{1,3} = \begin{cases} \bar{a}_{1,3} & \text{für } |a_{1,3}| > \delta \\ \delta & \text{sonst} \end{cases}$

The Method of Harten, Lax and Van Leer

Einfachstes Godunov-Typ Verfahren



Der Riemann-Löser nach Harten, Lax, van Leer (HLL) I

Weitere Vereinfachung gegenüber Roe-Löser:

Nur noch ein mittlerer Zustand

$$w\left(\frac{x}{t};u_l;u_r\right)=\begin{cases}a_l & \text{for} \quad \frac{x}{t}<a_l\\ a_{lr} & \text{for} \quad a_l\le\frac{x}{t}\le a_r\\ a_r & \text{for} \quad \frac{x}{t}>a_r\end{cases}$$

a_l, a_r kleinste und größte Wellengeschwindigkeit

a_{lr} mittlerer Zustand

Der Riemann-Löser nach Harten, Lax, van Leer (HLL) II

Konsistenz mit der integralen Erhaltung

$$u_{lr}=\frac{a_r u_r-a_l u_l-f(u_r)+f(u_l)}{a_r-a_l}$$

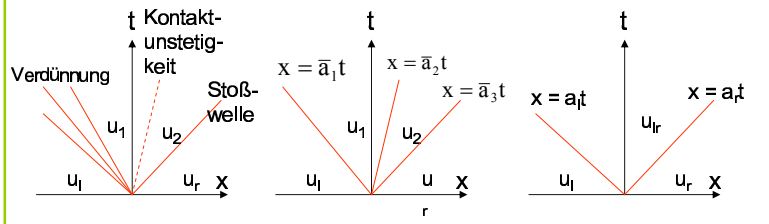
Numerischer Fluß:

$$g_{HLL}(u_l,u_r)=\frac{a_r^+ f(u_l)-a_l^- f(u_r)}{a_r^+-a_l^-}+\frac{a_r^+ a_l^-}{a_r^+-a_l^-}(u_r-u_l)$$

Berechnung der Signalgeschwindigkeiten:

$$a_l=\min\left\{v_l-c_l,\bar{v}-\bar{c},0\right\}$$
$$a_r=\max\left\{v_r-c_r,\bar{v}+\bar{c},0\right\}$$

Überblick Riemann-Löser



Godunov-scheme

Exakte Lösung des Riemann-Problems, Fixpunktiteration

Roe-scheme

Exakte Lösung des lin. Riemann-Problems, Charakteristiken-Theorie

HLL-scheme

A priori Abschätzung der schnellsten Wellen-geschwindigkeiten

Flux-Vector Splitting Methods

Aufspaltung des Flusses $f(u)=f^-(u)+f^+(u)$

left right

mit

non-negative EW $A^+(u)=\frac{df^+(u)}{du}$

non-positive EW $A^-(u)=\frac{df^-(u)}{du}$

Numerischer Fluß

$$g(u_i,u_{i+1})=f^+(u_i)+f^-(u_{i+1})$$

Flux-Vector Splitting nach Steger & Warming I

Euler Theorem:

Fluß der Euler-Gleichungen ist homogen vom Grad 1:

$$f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad \text{for all} \quad \alpha \in \Re$$

$$\rightarrow \quad f(u) = A(u)u \qquad A(u) \equiv \frac{df(u)}{du}$$

Idee: Diagonalisierung der Jacobi-Matrix A(u), Aufspalten der Diagonalmatrix in eine „positive“ und ein „negative“

Flux-Vector Splitting nach Steger & Warming II

Diagonalisierung $A = R^{-1} \Lambda R \quad \text{mit} \quad \Lambda := \text{diag}(v-c, v, v+c)$

Splitten von $\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-,$ $\quad \text{mit } \Lambda^+ := \text{diag}(a_1^+, a_2^+, a_3^+)$ $\quad \text{mit } \Lambda^- := \text{diag}(a_1^-, a_2^-, a_3^-)$

Splitten des Flusses: $f^{\pm}(u) \equiv A^{\pm}(u)u$

$$\rightarrow \quad g(u_i, u_{i+1}) = f^+(u_i) + f^-(u_{i+1})$$

Flux-Vector Splitting nach Steger & Warming III

$f^{\pm}_{1,1}$	$\frac{\rho}{2\gamma}\left(2(\gamma-1)\cdot a_2^{\pm} + a_1^{\pm} + a_4^{\pm}\right)$
$f^{\pm}_{1,2}$	$f^{\pm}_{1,1}\cdot v_1 + \left(a_4^{\pm} - a_1^{\pm}\right)\cdot\frac{\rho c}{2\gamma}$
$f^{\pm}_{1,3}$	$f^{\pm}_{1,1}\cdot v_2$
$f^{\pm}_{1,4}$	$f^{\pm}_{1,1}\cdot\frac{v_1^2+v_2^2}{2} + \left(a_4^{\pm} - a_1^{\pm}\right)\cdot\frac{\rho c v_1}{2\gamma} + \left(a_4^{\pm} + a_1^{\pm}\right)\cdot\frac{\rho c^2}{2(\gamma-1)\gamma}$

Steger-Warming Fluß in x-Richtung

Flux-Vector Splitting nach van Leer in x-Richtung

Machzahl M	Fluß nach rechts	Fluss nach links
$M \geq 1$	$F_1^+ = F_1$	$F_1^- = 0$
$-1 < M < 1$	$F_{1,1}^+ = \frac{\rho c}{4}(M+1)^2, M = \frac{v_1}{c}$ $F_{1,2}^+ = F_{1,1}^+ \cdot \frac{C_1}{\gamma}$ $F_{1,3}^+ = F_{1,1}^+ \cdot v_2$ $F_{1,4}^+ = F_{1,2}^+ \cdot C_1 \cdot \frac{\gamma}{2(\gamma^2-1)} + \frac{1}{2}F_{1,3}^{\pm}\cdot v_2$ mit $C_1 = (\gamma-1)\cdot v_1 + 2c$	$F_{1,1}^- = -\frac{\rho c}{4}(1-M)^2, M = \frac{v_1}{c}$ $F_{1,2}^- = F_{1,1}^- \cdot \frac{C_1}{\gamma}$ $F_{1,3}^- = F_{1,1}^- \cdot v_2$ $F_{1,4}^- = F_{1,2}^- \cdot C_1 \cdot \frac{\gamma}{2(\gamma^2-1)} + \frac{1}{2}F_{1,3}^- \cdot v_2$ mit $C_1 = (\gamma-1)\cdot v_1 - 2c$
$M \leq -1$	$F_1^+ = 0$	$F_1^- = F_1$

Flußberechnung

Upwind differencing

- Godunov-type schemes
  - Godunov, Roe, HLL, Osher
- Flux-vector Splitting schemes
  - Steger-Warming, van Leer, AUSM, ...

Stückweise konstante Werte

⇒ Erster Ordnung genau, recht ähnliche Ergebnisse

Anhang: Approximate Riemann Solvers

Definitionen und Mathematische Grundlagen

Anhang: Approximative Riemann-Lösung

Definition:
Die Funktion $w=w(x/t;u_l,u_r)$ heißt *approximative Riemann Lösung*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. a_l ist die kleinste, a_r die größte Signalgeschwindigkeit
2. Die Konsistenz mit der integralen Erhaltung ist gewährleistet:
$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} w(x/\Delta t;u_l,u_r)\,dx = \frac{\Delta x}{2}(u_l+u_r)-\Delta t(f(u_r)-f(u_l))$$
3. Konsistenz mit der integralen Entropie-Bedingung
$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} U(w(x/\Delta t;u_l,u_r))\,dx \le \frac{\Delta x}{2}(U_l+U_r)-\Delta t(F(u_r)-F(u_l))$$
Δt klein genug

Anhang: Godunov-Typ-Verfahren

Definition: Ein Verfahren wird *Godunov-Typ Verfahren* genannt, wenn gilt

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x/2} w(x/\Delta t;u_{i-1}^n,u_i^n)\,dx + \frac{1}{\Delta x}\int_{-\Delta x/2}^{0} w(x/\Delta t;u_i^n,u_{i+1}^n)\,dx$$

wobei *w* eine approximative Riemann.Lösung ist.

Theorem: Ein Godunov-Typ-Verfahren kann in konservativer Form geschrieben werden mit dem numerischen Fluß:

$$g_{i+1/2} = f(u_i) - \frac{1}{\Delta x}\int_{-\Delta x/2}^{0} w(x/\Delta t;u_i^n,u_{i+1}^n)\,dx + \frac{\Delta x}{2\Delta t}u_i$$