Das Godunov-Verfahren

S. Roller[1], M. Ferch[2], C.-D. Munz[2], M. Dumbser[2]

Universität Stuttgart
[1]Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS)
www.hlrs.de
[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de

Inhalt

Die Berechnung des numerischen Flusses

1. Finite-Volumen-Verfahren für die Eulergleichungen
2. Das Stoßwellenrohr
3. Die Idee von Godunov

Euler-Gleichungen in einer Raumdimension

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \qquad f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix}$$

Zustandsgleichung: $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \Leftrightarrow p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}\rho v^2\right)$

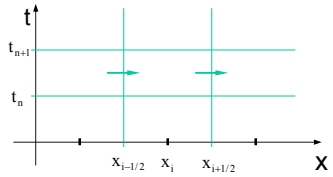
Gasdynamik

Das Godunov-Verfahren [CFD-06]

Finite-Volumen-Verfahren in einer Raumdimension

Erhaltungsgleichung:

$$u_t + f(u)_x = 0$$



Integration über $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t(x,t)\,dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(u(x,t))_x\,dx\,dt = 0$$

Finite-Volumen-Verfahren oder Verfahren in Erhaltungsform

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t(x,t)dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(u(x,t))_x dxdt = 0$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2},t)) - f(u(x_{i-1/2},t))dt = 0$$

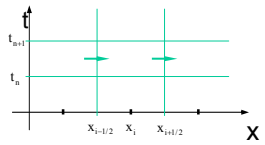
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)$$

u_i^n approximiert $\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_n)dx$ Integraler Mittelwert

$g_{i+1/2}$ approximiert $\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2},t))dt$ numerischer Fluss

Einfachste Flußberechnung: Mittelwert

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)$$



$g_{i+1/2}$ approximiert $\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2},t))dt$

Einfachste Form des Flusses:

$$g_{i+1/2} := \frac{1}{2}\left(f(u(x_i,t_n)) + f(u(x_{i+1},t_n))\right)$$

Einfachste Flußberechnung: Mittelwert

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)$$

$$g_{i+1/2} := \frac{1}{2}\left(f(u(x_i,t_n)) + f(u(x_{i+1},t_n))\right)$$

Einsetzen: → $u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f(u(x_{i+1},t_n)) - f(u(x_{i-1},t_n))\right)$

Zentrale Differenz. Bedingungslos instabil, kann stabilisiert werden durch hinzufügen künstlicher Viskosität

Jameson-Verfahren

Zentrale Differenz + künstlicher Viskosität:

$$g_{i+\frac{1}{2}} = g(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2}\left(f(u_i) + f(u_{i+1})\right)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right) + \varepsilon\Delta x^2 u_{xx} \quad \text{oder} \quad \varepsilon\Delta x^4 u_{xxxx}$$

Runge-Kutta Verfahren in der Zeit

=> Jameson Schema für transsonische Strömungen

Wahl der Dissipation sehr sophisticated

Godunov's Idee

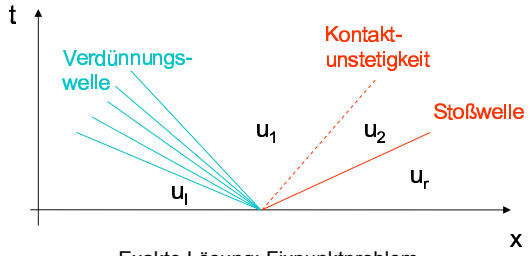
Das Stoßwellenrohr
(Shock tube)

Konstanter Zustand u_l	Konstanter Zustand u_r

$$u(x,t=0)=\begin{cases} u_l & \text{für } x<0 \\ u_r & \text{für } x>0 \end{cases}$$

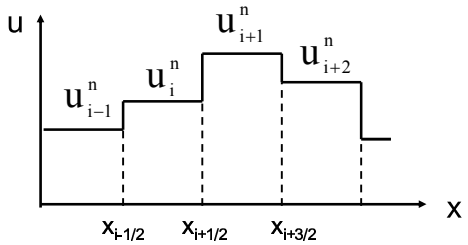
Riemann Problem für die Euler-Gleichungen

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{mit} \quad u(x,0)=\begin{cases} u_l & \text{für } x<0 \\ u_r & \text{für } x>0 \end{cases}$$



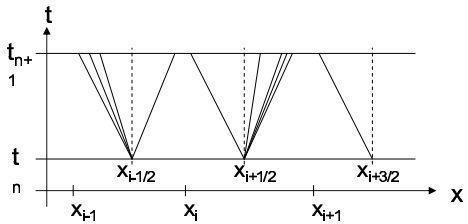
Exakte Lösung: Fixpunktproblem

Godunov's Idee in einer Raumdimension



Stückweise konstante Werte in jeder Zelle
Löse Riemann-Problem an jeder Zellkante

Formulierung als Finite Volumen Verfahren



$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g^n_{i+1/2} - g^n_{i-1/2}\right) \qquad \text{FV-scheme}$$

$g^n_{i+1/2}$ Numerischer Fluß bei $x_{i+1/2}$

$g_{i+1/2}$ approximiert $\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2},t))dt$

Die Methode von Godunov

Numerischer Fluß der Godunov-Methode:

$$g^{n}_{i+1/2} = f(u_{RP}(0; u_i, u_{i+1}))$$

u_{RP}: Lösung des Riemann-Problem an der Zellkante

Eigenschaften des Godunov-Verfahrens:

- Exakte Erhaltung
- Nichtlineare Wellenausbreitung
- Adaptivität

Stabilität: CFL-Bedingung