Klassifizierung der Gleichungen und der Phänomene

S. Roller[1], M. Ferch[2], C.-D. Munz[2], M. Dumbser[2]

Universität Stuttgart
[1]Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS)
www.hlrs.de
[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de

Die Gleichungen der Strömungsmechanik

- Klassifizierung partieller Differentialgleichungen
- Klassifizierung der Strömungsmechanik-Gleichungen
- Stöße, Verdünnungswellen, Kontaktunstetigkeiten

Klassifizierung partieller Differenzialgleichungen

- Differenzialgleichungen 2. Ordnung
  - Elliptische Differenzialgleichungen
  - Parabolische Differenzialgleichungen
  - Hyperbolische Differenzialgleichungen
- Evolutionsgleichungen
- Erhaltungsgleichungen

Lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} = h(u, u_x, u_y, x, y)$$

übliche Bezeichnung: $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, ..$

$a, b, c \in \Re$	linear mit konstanten Koeffizienten
$a = a(x, y), b = b(x, y), c = c(x, y)$	linear
$a = a(u), b = b(u), c = c(u)$	quasilinear
$a = a(u, u_x, u_y, x, y)$, b, c analog	nichtlinear

Klassifizierung partieller Differentialgleichungen

Eine Differenzialgleichung 2. Ordnung heißt

hyperbolisch	:	$b^2 - 4ac > 0$
parabolisch	:	$b^2 - 4ac = 0$
elliptisch	:	$b^2 - 4ac < 0$

Bezeichnungen analog zu Kegelschnitten:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = r$$

Elliptische Differenzialgleichungen

Physikalische Modelle

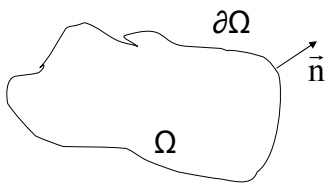
Stationäre Probleme wie Wärmestrom, Potenzialströmung, elektrisches Potenzial, stationäre Unterschallströmung, Durchbiegen einer Membran

Mathematische Modelle

$u_{xx}+u_{yy}=0$	Laplace-Gleichung
$u_{xx}+u_{yy}=f$	Poisson-Gleichung
$u_{xx}+u_{yy}+ku=f$	Helmholtz-Gleichung

Nebenbedingungen für elliptische Differenzialgleichungen

Randwertproblem



$u = f$	auf $\partial\Omega$	Dirichlet-Bedingung
$\frac{\partial u}{\partial n} = g$	auf $\partial\Omega$	Neumann-Bedingung
$u + \alpha \nabla u \cdot n = h$	auf $\partial\Omega$	Robin-Bedingung

Parabolische Differenzialgleichungen

Physikalische Modelle

Wärmeleitung, instationäre Temperaturverteilung, Diffusionsprozesse, Reibung-Viskosität, instationäre Vorgänge

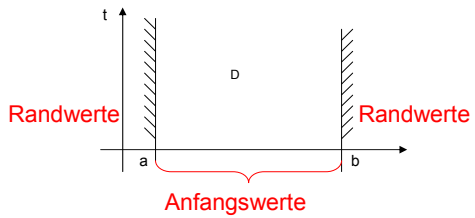
Mathematisches Modell

$u_t = \kappa \Delta u$	Wärmeleitungsgleichung
$u_t = \kappa u_{xx}$	Wärmeleitungsgleichung 1D

Für stationäre Vorgänge ($u_t = 0$) wird die parabolische DGL elleptisch.

Nebenbedingungen für parabolische Differenzialgleichungen

Anfangs-/Randwertproblem



$$u_t = \kappa u_{xx} \quad \text{in } [a,b]\times[0,T]$$

$$u(x,0) = g(x) \quad \text{für } x \in [a,b]$$
$$u(a,t) = u_a(t) \quad \text{für } t \in [0,T]$$
$$u(b,t) = u_b(t) \quad \text{für } t \in [0,T]$$

Hyperbolische Differenzialgleichungen

Physikalische Modelle — Wellenausbreitung, Akustik, elektromagnetische Wellen, Gasdynamik

Mathematisches Modell

$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (c \neq 0)$ — Wellengleichung

$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (c \neq 0)$ — Wellengleichung 1D

Nebenbedingungen für hyperbolische Differenzialgleichungen

Anfangswertproblem (AWP)

$$u(x,0) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \Re$$

Bemerkung: In der Praxis treten auch Anfangs-Randwertprobleme auf. Die Randwerte dürfen hier aber nicht beliebig gewählt werden. Es müssen so genannte Verträglichkeitsbedingungen erfüllt werden.

Evolutionsgleichungen

$$u_t + A\,u_x = 0$$

$$\text{mit} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad A \text{ ist eine } m \times m \text{ Matrix}$$

System von Differenzialgleichungen 1. Ordnung

A kann linear, linear mit konstanten Koeffizienten oder auch quasilinear sein.

Evolutionsgleichungen

Definition:

$u_t+Au_x=0$ heißt hyperbolisch, falls A nur reelle Eigenwerte a_1, a_2, …, a_m besitzt. Die Eigenwerte a_1, a_2, …, a_m sind die verschiedenen Wellen-geschwindigkeiten. Gibt es zu den Eigenwerten m Eigenvektoren, so nennt man die Evolutionsgleichung streng hyperbolisch.

Beispiel: Anfangswertproblem für eine skalare lineare Transportgleichung

$$u_t + a u_x = 0, \quad u(x,0) = q(x) \quad \text{für alle } x \in \Re, a \in \Re$$

einfachste hyperbolische Differentialgleichung

Lösung des AWP für eine lineare Transportgleichung

Charakteristiken

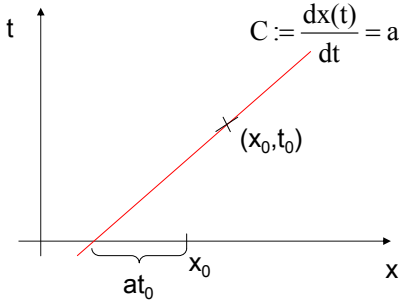
$$C: x = x(t) \text{ mit } \frac{dx(t)}{dt} = a$$

Änderung entlang C:

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t + u_x \frac{dx(t)}{dt} = u_t + a u_x = 0$$

u Lösung $\Rightarrow$ u = konstant auf C

Lösung des AWP für eine lineare Transportgleichung



$u(x,t)=u_0(x-at)$ für alle x, t

Information wird entlang der Charakteristiken transportiert

Systeme von linearen Transportgleichungen

Die Evolutionsgleichung sei streng hyperbolisch, d.h. sie besitzt m verschiedene Eigenwerte a_1, …, a_m.
$\Rightarrow$ Die Matrix A ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Matrix R mit:

$$\Rightarrow \quad \Lambda = R^{-1}AR = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots a_m)$$

Ähnlichkeits-transformation

R ist die Matrix der Eigenvektoren: $R=(r_1, \ldots, r_m)$
r_i Eigenvektor zum Eigenwert a_i, d.h. $A r_i = a_i r_i$

Was nützt das?

Antwort: $R^{-1}\cdot \quad u_t + A\,u_x = 0$

$$R^{-1}u_t + R^{-1}A\,u_x = 0$$
$$R^{-1}u_t + R^{-1}A\,R\,R^{-1}\,u_x = 0$$
$$(R^{-1}u)_t + \underbrace{R^{-1}AR}_{\Lambda}(R^{-1}u)_x = 0$$

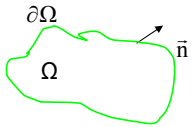
$w = R^{-1}u$ charakteristische Variablen

$w_t + \Lambda w_x = 0$ charakteristische Normalform

m entkoppelte SKALARE lineare Transportgleichungen

Erhaltungsgleichungen, Beispiel Massenerhaltung

Masse in Ω: $\int_\Omega \rho dV$, ρ Dichte



$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho dV = -\int_{\partial\Omega} f_m \vec{n} dA, \quad \Omega \text{ beliebig}$$

Integrale Massenerhaltung

Gaußscher Satz, Vertauschung von Integration und Differenziation

$$\int_\Omega (\rho_t + \nabla\cdot f_m)\,dV = 0$$

Ω beliebig $\Rightarrow$ $\rho_t + \nabla\cdot f_m = 0$

Differentielle Form, skalare Erhaltungsgleichung

Skalare Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$f(u) = au$ lineare Transportgleichung

$f(u) = \frac{1}{2}u^2$ Burgers-Gleichung

Quasilineare Form: $u_t + a(u)u_x = 0, \quad a(u) = \frac{df(u)}{du}$

Hyperbolische Differentialgleichung

Klassifizierung der Gleichungen in der Strömungsmechanik

Kompressible Strömungsmechanik:
Eulergleichungen in einer Raumdimension

Erhaltungsform: $u_t + f(u)_x = 0$

Qasilineare Form: $u_t + A(u)u_x = 0$

System von Erhaltungsgleichungen

Dieses System ist hyperbolisch, falls die Eigenwerte der Matrix A(u) reell sind.

Euler-Gleichungen in einer Raumdimension

Erhaltungsform: $\boxed{u_t + f(u)_x = 0}$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \qquad f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix}$$

Quasilineare Form $\boxed{u_t + A(u)u_x = 0}$ mit $A(u) = \frac{df(u)}{du}$

A(u) Jacobi-Matrix

Übung: Herleiten der Jacobi-Matrix

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ \frac{m}{\rho}(e+p) \end{pmatrix}$$

$$p = (\gamma - 1)\left(e - \tfrac{1}{2}\frac{m^2}{\rho}\right)$$

$$A(u) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{d\rho} & \frac{df_1}{dm} & \frac{df_1}{de} \\ \frac{df_2}{d\rho} & \frac{df_2}{dm} & \frac{df_2}{de} \\ \frac{df_3}{d\rho} & \frac{df_3}{dm} & \frac{df_3}{de} \end{pmatrix}$$

Quasilineare Form der Eulergleichungen

$\boxed{u_t + A(u)u_x = 0}$ A: 3x3 Matrix

$$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 & (3-\gamma)v & \gamma - 1 \\ v\left(\frac{\gamma-1}{2}v^2 - H\right) & H - (\gamma-1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix

mit $H = \frac{e+p}{\rho}$, $c^2 = \gamma\frac{p}{\rho}$ c Schallgeschwindigkeit

Eigenwerte: a_1=v-c, a_2=v, a_3=v+c

Eigenschaften der Eulergleichungen

Die Eulergleichungen sind hyperbolische Gleichungen – nichtlineare Wellengleichungen.

Problem: Stoßwellen – Verdichtungsstöße

Die Charakteristiken sind bei nichtlinearen hyperbolischen Gleichungen lösungsabhängig und können sich schneiden: Zusammenbruch einer differenzierbaren Lösung. Das Differentialgleichungssystem verliert seine Gültigkeit.

Bei der Anwendung eines numerischen Verfahrens muss man dies berücksichtigen => Shock-Capturing-Verfahren.

Kompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Impulsgleichung: $\boxed{(\rho v)_t + \nabla\cdot((\rho v)\circ v) + \nabla p = \nabla\cdot\tau + f}$

Reibungstensor

im Reibungstensor stecken 1.-te Ableitungen von v
=> Differentialgleichungssystem 2.-ter Ordnung

eindimensional ergibt sich: $\frac{1}{Re} v_{xx}$

Reibungstensor enthält parabolische Terme

Kompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Energiegleichung: $\boxed{e_t + \nabla\cdot(v(e+p)) = \nabla(\tau\cdot v) - \nabla\cdot q + f\cdot v + Q}$

Reibung Wärmeleitung

$q = -k\nabla T$, T Temperatur

Reibung und Wärmeleitung sind parabolische Terme

Dichtegleichung: $\boxed{\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) = 0}$

unverändert und somit hyperbolisch

Eigenschaften der Navier-Stokes-Gleichungen

Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen sind ein parabolisch-hyperbolische System.

Problem: Reibungs- und Wärmeleitungsterme sind klein (kleine Reynoldszahl).
Strömungsbestimmend sind dann die Konvektionsterme, d.h. die Eulerterme. Es treten lokal starke Gradienten auf.

Bei der Anwendung eines numerischen Verfahrens muss man dies berücksichtigen => Shock-Capturing-Verfahren für die Eulergleichungen. Wärmeleitung und Reibung ist ein parabolischer Störungsterm.

Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

$$v_t + v\cdot\nabla v + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho Re}\Delta v + f,$$
$$\nabla\cdot v = 0$$

Konvektionsterme: hyperbolisch	Druckterme: elliptisch	Reibungstensor: Parabolischer Term

Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen sind parabolisch-elliptisch. Bei hohen Reynoldszahlen überwiegen allerdings die hyperbolischen Terme.

Kenngrößen einer Strömung

Machzahl:	$M = \frac{u}{c}$	=	$\frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}{\text{Schallgeschwindigkeit}}$
Reynoldszahl:	$Re = \frac{u \ell \rho}{\mu}$	=	$\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}$
Froudezahl:	$Fr = \frac{u^2}{g \ell}$	=	$\frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}}$
Prandtlzahl:	$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$	=	$\frac{\text{Impulstransport}}{\text{Wärmeleitfähigkeit}}$

Die Gleichungen - Übersicht

Kompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie mit Reibung und Wärmeleitung

hyperbolisch – parabolisch

$Re \to \infty$

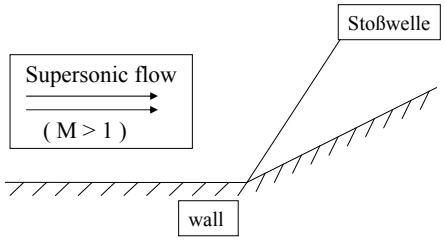
$M = \frac{|v|}{c} \to 0$

Euler-Gleichungen	Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen
Gasdynamik	*parabolisch – elliptisch*
hyperbolisch	

Euler Gleichungen – Typische Strömungsphänomene I

Die nichtlinearen Euler-Gleichungen lassen unstetige Lösungen, sog. *Shocks* oder *Stöße* zu. Diese können sich nach endlicher Zeit entwickeln, auch wenn die Anfangsdaten glatt sind.

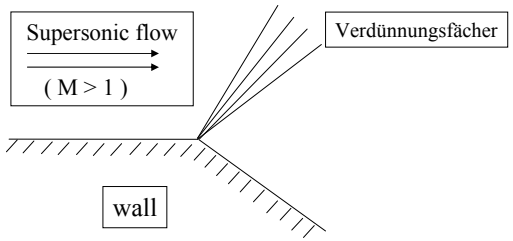
Beispiel: Kompression einer supersonischen Strömung an einer Wand bildet eine Stoßwelle aus



Euler Gleichungen – Typische Strömungsphänomene II

Die nichtlinearen Euler-Gleichungen lassen auch glatte Lösungen zu wie *Verdünnungsächer (rarefaction fans)*.

Beispiel: Verdünnung einer supersonischen Strömung an einer Wand



Euler Gleichungen – Typische Strömungsphänomene III

Die Euler-Gleichungen lassen die Erhaltung von Materialgrenzflächen zu (z.B. Kontakt von Wasser und Luft, Kontakt von heißem und kaltem Fluid, …). Diese Trennflächen werden *Kontaktunstetigkeiten* genannt.

Beispiel: Trennung eines heißen und eines kalten Fluids

Heißes Fluid

T = 200°

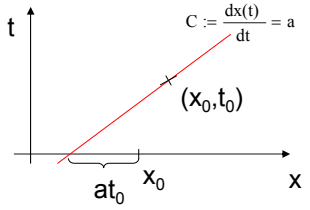
Kaltes Fluid

T = 50°

Kontaktunstetigkeit

Klassifizierung der Phänomene: Mathematische Erklärung

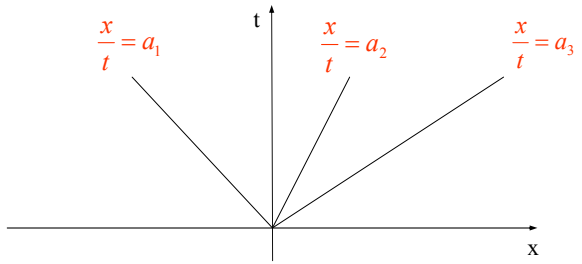
Charakteristiken 1D:



$u(x,t)=u_0(x-at)$ für alle x, t

Charakteristiken sind Kurven, entlang derer die Lösung konstant ist

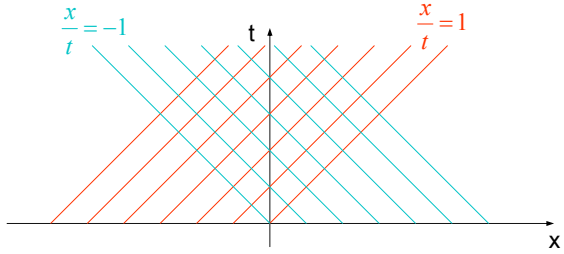
Charakteristiken für Systeme von PDGL I



Systeme: Mehrere Charakterisitiken
Charakteristiken können sich schneiden

Charakteristiken für Systeme von PDGL II

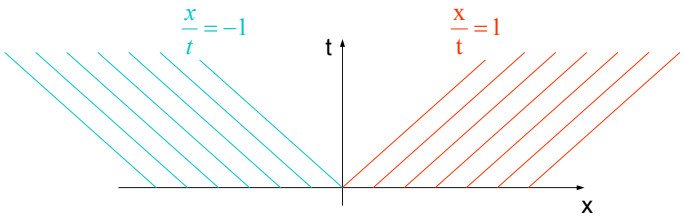
Beispiel 1:



Charakteristiken schneiden sich => Stoßwelle

Charakteristiken für Systeme von PDGL III

Beispiel 2:



Divergenz der Characteristiken => Verdünnungswelle