Die Gleichungen der Strömungsmechanik

S. Roller[1], M. Ferch[2], C.-D. Munz[2], M. Dumbser[2]

Universität Stuttgart
[1]Höchstleistungsrechenzentrum Stuttgart (HLRS)
www.hlrs.de
[2]Institut für Aerodynamik und Gasdynamik (IAG)
www.iag.uni-stuttgart.de

Die Gleichungen der Strömungsmechanik

- Motivation
- Modellierung
- Erhaltungsgleichungen
- Die Gleichungen einer kompressiblen Strömung
- Die Gleichungen einer inkompressiblen Strömung

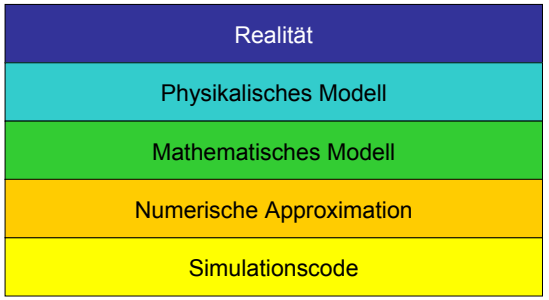
Motivation

Ziel: Simulation von Gas- oder Flüssigkeitsströmungen

Gase: kompressibel
→ Unstetigkeiten (Stöße, Kontaktunstetigkeiten)
Flüssigkeiten: inkompressibel
→ unendliche schnelle Ausbreitung von Störungen

=> Unterschiedliche Typen von Verfahren

Modellierung

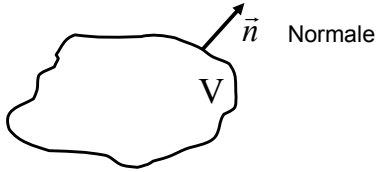


Physikalische Modellierung: Erhaltungsgleichungen

Z.B. Massenerhaltung:

Masse in V: $\int_V \rho dV$

ρ Dichte

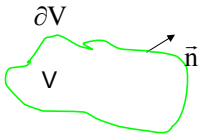


Masse kann nicht entstehen oder verschwinden

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_{\partial V} f_m \cdot \vec{n}\, dS$$

Kontinuumsannahme

Beispiel Massenerhaltung: Integral- und Differentialform



Masse in V: $\int_V \rho\, dV$ (ρ Dichte)

Integrale Massenerhaltung

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_{\partial V} f_m \cdot \vec{n}\, dA, \quad V \text{ beliebig}$$

Gaußscher Satz, Vertauschung von Integration und Differenziation

$$\int_V (\rho_t + \nabla \cdot \underbrace{f_m}_{=\rho v})\, dV = 0$$

da V beliebig ⇒

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$

Differentielle Form

Physikalische Modellierung: Integrale Massenerhaltung

Änderung der Masse in V ⇔ Fluss durch den Rand

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_{\partial V} f_m \cdot \vec{n}\, dS$$

Integrale Massenerhaltung

Annahme: ρ, f_m sind stetig differenzierbar

Vertauschung von Integration und Differentiation + Satz von Gauß

$$\int_V \frac{d}{dt}\rho\, dV = -\int_V \nabla \cdot f_m\, dV \quad \Leftrightarrow \quad \int_V \rho_t + \nabla \cdot \underbrace{f_m}_{=\rho v} dV = 0$$

Dies gilt für jedes beliebige Teilgebiet V

$$\Rightarrow \quad \rho_t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$

Differentielle Form der Massenerhaltung

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik

Physikalisches Modell:

Integrale Erhaltung von
Masse, Impuls und Energie

Mathematisches Modell:

Navier-Stokes-Gleichungen
System von Differentialgleichungen

Erhaltung der Masse

Erhaltungsgröße: ρ (Massendichte)

Änderung der Dichte durch:

1. Konvektion

Integrale Form:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = -\int_{\partial V} (\rho v)\cdot \vec{n} dS$$

Konvektion

Differenzielle Form:

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$

Erhaltung des Impulses

Erhaltungsgröße: ρv (Impulsdichte)

Änderung des Impulses durch:

1. Konvektion
2. Oberflächenkräfte: Druck, Reibung
3. Volumenkräfte: Gravitation, elektro-magn., ...

Integrale Form

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v \, dV = -\int_{\partial V} ((\rho v)\circ v)\vec{n}\, dS - \int_{\partial V} (pI)\vec{n}\, dS + \int_{\partial V} \tau \vec{n}\, dS + \int_V f\, dV$$

Konvektion, Druckkräfte, Reibung, Äußere Kräfte

Differenzielle Form:

$$(\rho v)_t + \nabla\cdot((\rho v)\circ v) + \nabla p = \nabla\cdot\tau + f$$

Erhaltung der Energie

Erhaltungsgröße: e (Gesamtenergie pro Einheitsvolumen)

Änderung der Energie durch:

1. Konvektion
2. Arbeit durch Druckkräfte, Reibung
3. Arbeit durch Volumenkräfte
4. Wärmeleitung
5. Wärmezufuhr

Integrale Form:

$$\frac{d}{dt}\int_V e\, dV = -\int_{\partial V} ve\cdot\vec{n}\, dS - \int_{\partial V} vp\cdot\vec{n}\, dS + \int_{\partial V} \tau v\cdot\vec{n}\, dS + \int_V f\cdot v\, dV - \int_{\partial V} q\cdot\vec{n}\, dS + \int_V Q\, dV$$

Konvektion, Druck-Kräfte, Reibung, Äußere Kräfte, Wärme-leitung, Wärme-zufuhr

Differenzielle Form:

$$e_t + \nabla\cdot(v(e+p)) = \nabla\cdot\tau v + f\cdot v - \nabla\cdot q + Q$$

Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$ Massenerhaltung

$$(\rho v)_t + \nabla\cdot((\rho v)\circ v) + \nabla p = \nabla\cdot\tau + f$$ Impulserhaltung

$$e_t + \nabla\cdot(v(e+p)) = \nabla(\tau\cdot v) - \nabla\cdot q + f\cdot v + Q$$ Energieerhaltung

ρ	Dichte	p	Druck
v	Geschwindigkeit	τ	Reibungstensor
e	Gesamtenergie	q	Wärmefluss

Zustandsgleichung: $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, $e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_2^2) + \rho g h$

ideales Gas; Innere; kinetische Energie; potentielle

System von Erhaltungsgleichungen

Gleichungen der Gasdynamik: Die Euler-Gleichungen

Reibungseffekte und Wärmeleitung können oft vernachlässigt werden

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$
$$(\rho v)_t + \nabla \cdot ((\rho v) \circ v) + \nabla p = f$$
$$e_t + \nabla \cdot (v(e+p)) = f \cdot v + Q$$

Zustandsgleichung: $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \;\Leftrightarrow\; p = (\gamma - 1)\left(e - \tfrac{1}{2}\rho v^2 - \rho g h\right)$

Gasdynamik

Euler-Gleichungen in zwei Raumdimensionen

$$u_t + f_1(u)_x + f_2(u)_y = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ e \end{pmatrix} \quad f_1(u) = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ v_1(e+p) \end{pmatrix} \quad f_2(u) = \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ v_2(e+p) \end{pmatrix}$$

Zustandsgleichung: $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \;\Leftrightarrow\; p = (\gamma - 1)\left(e - \tfrac{1}{2}\rho v^2\right)$

Gasdynamik

Euler-Gleichungen in einer Raumdimension

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \quad f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix}$$

Zustandsgleichung: $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \;\Leftrightarrow\; p = (\gamma - 1)\left(e - \tfrac{1}{2}\rho v^2\right)$

Gasdynamik

Die Gleichungen einer inkompressiblen Strömung

Einfachster Fall: Dichte= konstant, Temperatur konstant

Kompressible Gleichungen:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$
$$(\rho v)_t + \nabla((\rho v) \circ v) + \nabla p = \nabla \tau + f$$
$$e_t + \nabla \cdot (v(e+p)) = \nabla \cdot (\tau v) - \nabla \cdot q + f \cdot v + Q$$
$$+ \text{Zustandsgleichung} : p = p(\rho, \varepsilon)$$

Inkompressible Gleichungen:

$$\nabla \cdot v = 0$$
$$v_t + v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho\,\mathrm{Re}}\Delta v + f$$

Inkompressibler Grenzwert: Machzahl → 0

Entdimensionalisierung - Referenzwerte

Numerisch können Probleme auftreten, wenn die Variablen extrem unterschiedliche Größenordungen haben.

=> Üblicherweise werden die Variablen entdimensionalisiert:

$$p_{ref}, \rho_{ref}, x_{ref}, u_{ref}, c_{ref} = \sqrt{\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}}}, T_{ref} = \frac{p_{ref}}{R\rho_{ref}}, t_{ref} = \frac{x_{ref}}{u_{ref}}$$

$$\hat{p} = \frac{p}{p_{ref}}, \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, \hat{x} = \frac{x}{x_{ref}}, \hat{U} = \frac{U}{u_{ref}}, c = \frac{c}{c_{ref}}, \hat{t} = \frac{t}{t_{ref}}, \hat{T} = \frac{T}{T_{ref}}$$

Entdimensionalisierung – Die Gleichungen

Wähle

$$u_{ref} = c_{ref}$$

Eulergleichungen: dimensionsbehaftete / dimensionslose Form

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$
$$(\rho v)_t + \nabla\cdot((\rho v)\circ v) + \nabla p = 0$$
$$e_t + \nabla\cdot(v(e+p)) = 0$$

Zustandsgleichung: $p = (\gamma-1)\rho\varepsilon \Leftrightarrow p = (\gamma-1)\left(e - \tfrac{1}{2}\rho v^2\right)$

Entdimensionalisierung – Die Gleichungen

Wähle

$$u_{ref} \neq c_{ref}$$

Eulergleichungen: dimensionslose Form

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$
$$(\rho v)_t + \nabla\cdot((\rho v)\circ v) + \frac{1}{M^2}\nabla p = 0$$
$$e_t + \nabla\cdot(v(e+p)) = 0$$

Zustandsgleichung: $p = (\gamma-1)\rho\varepsilon \Leftrightarrow p = (\gamma-1)\left(e - \frac{M^2}{2}\rho v^2\right)$

Entdimensionalisierung – Die Gleichungen

Navier-Stokes-Gleichungen: dimensionslose Form

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$
$$(\rho v)_t + \nabla((\rho v)\circ v) + \nabla p = \nabla\tau + f$$
$$e_t + \nabla\cdot(v(e+p)) = \nabla\cdot(\tau v) - \nabla\cdot q + f\cdot v + Q$$

Zustandsgleichung: $p = (\gamma-1)\rho\varepsilon \Leftrightarrow p = (\gamma-1)\left(e - \tfrac{1}{2}\rho v^2 - \rho g h\right)$