Nuss-Projekt 2

Programmierung verschiedener Riemannlöser in Fortran 90

1 Aufgabenstellung und Lehrziele

1.1 Aufgabenstellung

In diesem Projekt soll das Herzstück eines Finite-Volumen Codes, der Riemannlöser, implementiert und verschiedene Verfahren getestet werden. Ein fertiges Codegerüst wird zur Verfügung gestellt, in das die Flußfunktionen direkt einprogrammiert werden können. Es soll der prinzipielle Ablauf eines FV-Codes nachvollzogen werden sowie der Übergang von einer auf zwei Raumdimensionen.

Folgende numerischen Schemata sind zu implementieren:

- Zentrales Schema mit und ohne Dissipation
- Godunov (exakter Riemann-Löser wird zur Verfügung gestellt)
- Roe
- HLLE
- Lax-Friedrichs
- Steger-Warming

Die Schemata sollen an folgenden 1D Testbeispielen validiert werden:

- Gausspuls (reine Advektion in v)
- Instationärer Stoss in Anfangsdaten (Rankine-Hugoniot Relation)
- Reine Kontaktunstetigkeit in Anfangsdaten
- Sod test problem
- Toro's Standardtests Nr. 3 und 4

Die Ergebnisse sollen in der folgenden Vorlesung präsentiert und verglichen werden.

1.2 Lehrziele

- Implementierung verschiedener Riemann-Löser
- Einführung in die Entwicklung eines komplexen Strömungssimulationscodes am Beispiel eines Finite-Volumen Codes auf strukturierten Gittern
- Einführung in Fortran90
- Berechnung einfacher Testbeispiele
- Visualisierung mit OpenDX
- Interpretation, Bewertung und Präsentation von Ergebnissen

1.3 Benötigte Software

- Linux
- IFC (Fortran90-Compiler)
- IBM OpenDX

2 Grundgleichungen

Die eindimensionalen Eulergleichungen in allgemeiner Form lauten

$$u_t + f_1(u)_x = 0$$

mit

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ e \end{pmatrix}, \qquad f_1 = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ v_1(e+p) \end{pmatrix}$$

Zustandsgleichung $\qquad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \qquad e = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 + v_2^2)$

Enthalpie $\qquad H = \frac{e+p}{\rho}$

3 Verfahren in Erhaltungsform

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}\right)$$

3.1 Zentrales Schema

$$g_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}\left(f_1\left(u_{i+1,j}\right) + f_1\left(u_{i,j}\right)\right)$$

Zentrale Verfahren sind bedingungslos instabil. Sie müssen durch künstliche Viskositätsterme der Form $\varepsilon\Delta x^2 u_{xx}$ oder $\varepsilon\Delta x^4 u_{xxxx}$ stabilisiert werden.

3.2 Godunov-Typ Verfahren

Grundprinzip: Bestimmung der Flüsse durch (approximatives) Lösen eines Riemann-Problems an den Zellgrenzen.

Die Flußdifferenz am Rand eines Gitterintervalls wird in die Anteile nach rechts und links zerlegt und geeignet approximiert. Man nennt diese Verfahren daher auch Flußdifferenzen-Splitting Verfahren.

3.2.1 Godunov-Verfahren

Exakte Lösung des Riemann-Problems

$$g_{i+1/2,j} = f_1\left(u_{RP}\left(0; u_{ij}, u_{i+1,j}\right)\right)$$

Eigenschaften des Godunov-Verfahrens sind exakte Erhaltung, Beinhalten nichtlinearer Wellenausbreitung und Adaptivität.

3.2.2 Roe-Verfahren

Lösung des exakten Riemann-Problems für die linearisiert Erhaltungsgleichung

$$u_t + A_{lr} u_x = 0$$

Dabei muß die Matrix A_{lr} folgende 3 Bedingungen erfüllen:

1. $A_{lr}(u,u) = A(u)$ (mit $A(u) = \partial f_1(u)/\partial u$ Jacobi-Matrix)
2. A_{lr} diagonalisierbar (Hyperbolizität)
3. Mittelwerteigenschaft $f_1(u_r) - f_1(u_l) = A_{lr}(u_r - u_l)$

Die Matrix $A_{lr} = A(\bar{u})$ mit den Mittelwerten

$$\bar{v}_1 = \frac{\sqrt{\rho_r}v_{1r} + \sqrt{\rho_l}v_{1l}}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}, \bar{v}_2 = \frac{\sqrt{\rho_r}v_{2r} + \sqrt{\rho_l}v_{2l}}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}, \bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_r}H_r + \sqrt{\rho_l}H_l}{\sqrt{\rho_r} + \sqrt{\rho_l}}$$

$$\bar{c}^2 = (\gamma - 1)\left(\bar{H} - \frac{1}{2}\bar{v}^2\right)$$

erfüllt diese Bedingungen. Die Eigenwerte der Matrix A_{lr} sind

$$a_1 = \bar{v}_1 - \bar{c}, a_2 = a_3 = \bar{v}_1, a_4 = \bar{v}_1 + \bar{c},$$

die Eigenvektoren

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_1 - \bar{c} \\ \bar{v}_2 \\ \bar{H} - \bar{v}_1\bar{c} \end{pmatrix}, \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \frac{1}{2}\left(\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2\right) \end{pmatrix}, \qquad r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}, \qquad r_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_1 + \bar{c} \\ \bar{v}_2 \\ \bar{H} + \bar{v}_1\bar{c} \end{pmatrix}.$$

Mit den Bezeichnungen

$$\Delta\rho = \rho_r - \rho_l \qquad \Delta m_1 = \rho_r v_{1r} - \rho_l v_{1l} \qquad \Delta m_2 = \rho_r v_{2r} - \rho_l v_{2l}$$
$$\Delta e = e_r - e_l \qquad \overline{\Delta e} = \Delta e - (\Delta m_2 - \bar{v}_2\Delta\rho)\bar{v}_2$$

erhält man aus der Bedingung $u_r - u_l = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i r_i$ die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= -\frac{\gamma - 1}{\bar{c}^2}\left[\Delta\rho\left(\bar{v}_1^2 - \bar{H}\right) - \bar{v}_1\Delta m_1 + \overline{\Delta e}\right] \\
\gamma_1 &= -\frac{1}{2\bar{c}}\left[\Delta m_1 - \Delta\rho\left(\bar{v}_1 + \bar{c}\right)\right] - \frac{1}{2}\gamma_2 \\
\gamma_4 &= \Delta\rho - \gamma_1 - \gamma_2 \\
\gamma_3 &= \Delta m_2 - \bar{v}_2\Delta\rho
\end{aligned}$$

Damit erhält man den Roe-Fluß als

$$g_{i+1/2,j} = \tfrac{1}{2}\left(f_1\left(u_{i+1,j}\right) + f_1\left(u_{i,j}\right)\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\gamma_k|a_k|r_k$$

Das Roe-Verfahren läuft dann folgendermaßen ab:

- Berechne die Roe-Mittelwerte $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{H}$ und $\bar{c}$
- Berechne die gemittelten Eigenwerte a_1, a_2, a_3, a_4
- Berechne die gemittelten Rechtseigenvektoren r_1, r_2, r_3, r_4
- Berechne die Faktoren $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$
- Berechne den Roe-Fluß $g_{i+1/2,j}$

Eigenschaften des Roe-Verfahrens sind

- Ein einzelner Stoß oder eine einzelne Kontaktunstetigkeit wird exakt aufgelöst
- Unterschätzen der Wellengeschwindigkeit bei Verdünnungen
- Bei starken Verdünnungen kann die Konsistenz mit der Entropiebedingung verletzt sein (Entropy-Fix notwenig)

3.2.3 HLLE-Verfahren

Approximative Lösung des Riemann-Problems: nur ein mittlerer Zustand

$$g_{i+1/2,j} = \frac{a_r^+ f_1(u_{ij}) - a_l^- f_1(u_{i+1,j})}{a_r^+ - a_l^-} + \frac{a_r^+ a_l^-}{a_r^+ - a_l^-} (u_{i+1,j} - u_{ij})$$

mit den Signalgeschwindigkeiten $a_r^+ = max\{0, v_{1r} + c_r, \bar{v}_1 + \bar{c}\}$, $a_l^- = min\{0, v_{1l} - c_l, \bar{v}_1 - \bar{c}\}$.

3.3 Lax-Friedrichs Verfahren

Wähle $a_l = -\frac{\Delta x}{\Delta t}, a_r = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Dann ergibt sich

$$g_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}\left(f_1\left(u_{i+1,j}\right) + f_1\left(u_{i,j}\right)\right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(u_r - u_l)$$

Für das Lax-Friedrichs Verfahren muß die CFL-Bedingung

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > max\{|v - c|, |v + c|\}$$

eingehalten werden.

3.4 Flußvektor-Splitting Verfahren

Aufteilung der Flüsse in nach rechs laufende und nach links laufende Anteile:

$$f_1(u) = f_1^+(u) + f_1^-(u)$$

Der numerische Fluß ist dann

$$g_{i+1-2,j} = f_1^+(u_{ij}) + f_1^-(u_{i+1,j})$$

3.4.1 Steger-Warming

Grundidee: Diagonalisierung der Jacobi-Matrix $A(u)$ und Aufteilung der Diagonalmatrix in eine positive und eine negative. Die positive kommt von links und läuft nach rechts, die negative umgekehrt. Mit den Eigenwerten $a_1 = v_1 - c, a_2 = a_3 = v_1, a_4 = v_1 + c$ ergibt sich

$$f_1^{\pm} = \begin{pmatrix} f_{1,1}^{\pm} \\ f_{1,2}^{\pm} \\ f_{1,3}^{\pm} \\ f_{1,4}^{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2\gamma}\left(2\left(\gamma-1\right)a_2^{\pm} + a_1^{\pm} + a_4^{\pm}\right) \\ f_{1,1}^{\pm} v_1 + \left(a_4^{\pm} - a_1^{\pm}\right)\frac{\rho c}{2\gamma} \\ f_{1,1}^{\pm} v_2 \\ f_{1,1}^{\pm}\frac{v_1^2+v_2^2}{2} + \left(a_4^{\pm} - a_1^{\pm}\right)\frac{\rho c v_1}{2\gamma} + \left(a_4^{\pm} + a_1^{\pm}\right)\frac{\rho c^2}{2\gamma(\gamma-1)} \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet $a_i^{\pm}$ den positiven Eigenwert $a_{l,i}$ oder den negativen Eigenwert $a_{r,i}$ also

$$\begin{aligned} a_i^{+} &= max(a_{l,i}, 0) = \begin{cases} a_{l,i} & \text{falls } a_{l,i} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ a_i^{-} &= min(a_{r,i}, 0) = \begin{cases} a_{r,i} & \text{falls } a_{r,i} < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}.$$

Die übrigen Variablen sind gemäß der obigen Definition des Flusses zu wählen, also für f^+ die Werte von links, $\rho_l, v_{1l}, v_{2l}, c_l$, für f^- die von rechts, $\rho_r, v_{1r}, v_{2r}, c_r$.