Nuss-Projekt 1

Numerische Simulation und analytische Vergleichsrechnung eines Keilprofiles

1 Aufgabenstellung und Lehrziele

1.1 Aufgabenstellung

Im folgenden Anwendungsbeispiel soll ein Keilprofil in einer Überschallströmung mit einer Anströmmachzahl von $M_0 = 3.0$ bei verschiedenen Anstellwinkeln von 0 bis 20° mit Hilfe des am IAG entwickelten Finite-Volumen Codes HYDSOL berechnet werden. Das für die Simulation zu benutzende Gitter wird zur Verfügung gestellt. Zu untersuchen sind dabei die qualitativen Strömungsverläufe (Stöße, Verdünnungsfächer und Entropietrennflächen) wie auch quantitative Aussagen über die aerodynamischen Beiwerte, die am Ende der Übung von den einzelnen Gruppen zu einer Polaren zusammengesetzt werden. Da bei diesem Beispiel eine theoretische Vergleichslösung der Strömung mit Hilfe der Stoß-Expansions Theorie vorliegt, soll zunächst diese analytische Lösung mittels eines Maple Worksheets hergeleitet werden. Danach sind die mit HYDSOL gewonnenen numerischen Ergebnisse mit der Theorie kritisch zu vergleichen.

1.2 Lehrziele

- Anwendung eines bestehenden Finite-Volumen Codes auf unstrukturierten Gittern
- Einführung in das symbolische Mathematikprogramm Maple
- Einführung in das Visualisierungsprogramm IBM Open DX
- Verständnis der grundlegenden Phänomene einer Überschallströmung
- Mathematische Umsetzung der Grundgleichungen supersonischer Strömungen
- Teamarbeit

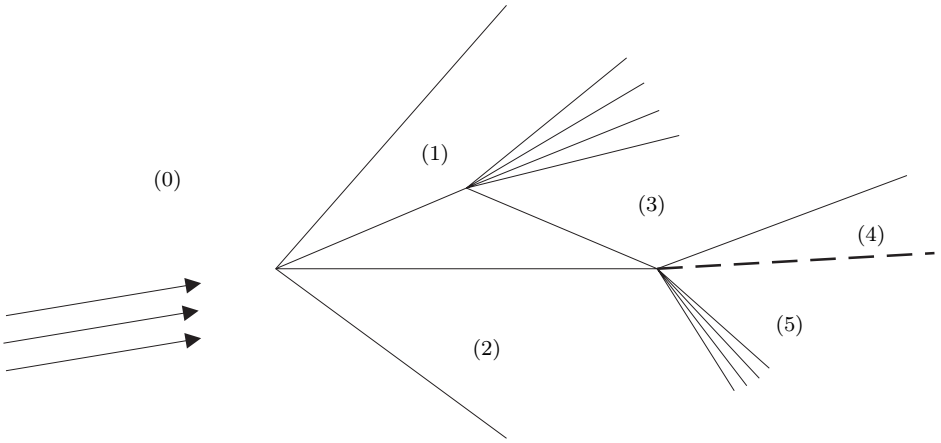

Abbildung 1: Konfiguration 1 mit drei Stößen

1.3 Benötigte Software

- Linux
- Maple
- HYDSOL
- IBM OpenDX

1.4 Gegebene Größen

- $M_0 = 3.0$
- $a_0 = 0.0, 2.0, 4.0, ...20.0°$
- $p_0 = 1.0$
- $\rho_0 = 1.0$
- $\gamma = 1.4$
- $l = 2.0$, $h = 0.2$
- $\theta = \arctan \frac{2h}{l}$

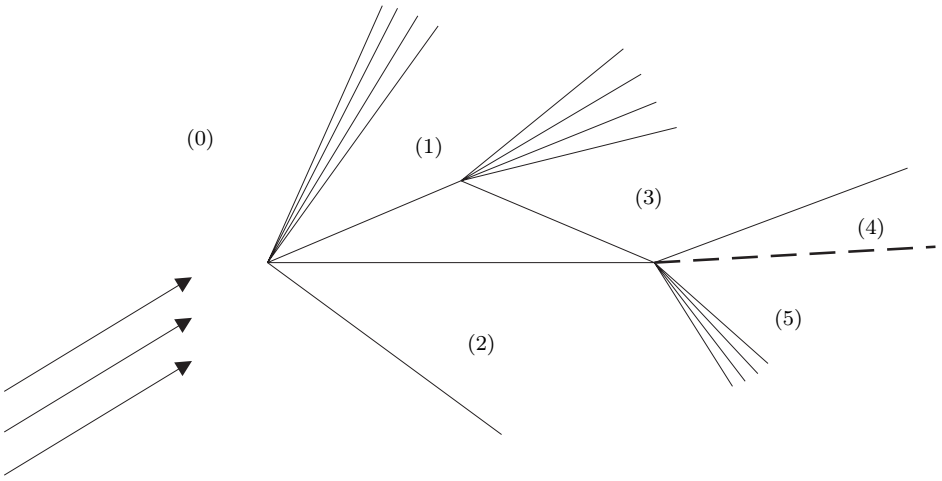

Abbildung 2: Konfiguration 2 mit drei Expansionsfächern

2 Benötigte Formeln

2.1 Allgemeine Beziehungen

Definition der Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \tag{1}$$

Definition der Machzahl

$$M = \frac{V}{c} \tag{2}$$

Ideale Gasgleichung

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T \tag{3}$$

Isentropenbeziehungen für Dichte und Druck:

$$\rho_1 = \rho_0 \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{4}$$

$$p_1 = p_0 \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{5}$$

2.2 Stoßformeln

$$\frac{\tan(\sigma_1 - (\theta - \alpha)}{\tan(\sigma_1)} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_0^2 \sin^2(\sigma_1)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \tag{6}$$

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{\tan(\sigma_1)}{\tan(\sigma_1 - (\theta - \alpha))} \tag{7}$$

$$M_{0n1} = M_0 \sin(\sigma_1) \tag{8}$$

$$p_1 = p_0 \frac{2}{1 + \gamma} (\gamma M_{0n1}^2 - \frac{\gamma - 1}{2}) \tag{9}$$

$$M_{1n} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{0n1}^2}{\gamma M_{0n1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$M_1 = \frac{M_{1n}}{\sin(\sigma_1 - (\theta - \alpha))} \tag{11}$$

2.3 Expansionsfächer

Definition der Prandtl-Meyer Funktion:

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}(M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1} \tag{12}$$

Relation über den Fächer

$$\nu(M_1) = \nu(M_0) + (\alpha - \theta) \tag{13}$$