Implizite Finite-Volumen-Verfahren und präkonditionierte Krylov-Unterraum-Verfahren bei der Diskretisierung hyperbolischer und parabolischer Erhaltungsgleichungen

Andreas Meister

Universität Kassel, Fachbereich Mathematik/Informatik

- **Zielsetzung**
- **Navier-Stokes-Gleichungen**
- **Finite-Volumen-Verfahren**
- **Iterative Gleichungssystemlöser und Präkonditionierer**
- **Resultate**

Zielsetzung

- **Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Simulation praxisrelevanter Strömungsfelder im Rahmen des DLR-Projektes CASWING**
- **Flexible Nutzung als Basismethode**
  - Turbulente Verbrennung [Oevermann '97]
  - Chemisch reagierende Strömungen [Hannemann '97]
  - Strömungen kleiner Mach-Zahl
    [M. 2000, Klein, M., Munz, Sonar et.al. 2001]
  - Thermoregulation [Fischer, Ludwig, M. 2000]
- **Untersuchung von Beschleunigungstechniken**
- **Anforderungen**
  - Strömungsangepaßte Diskretisierung beliebig komplexer Geometrien
  - Berücksichtigung bewegter Geometrien
  - Zeitgenauigkeit
  - Berücksichtigung von Turbulenzeffekten
    [M. '96, M., Sonar '98, M., Oevermann '98]
  - Rechenzeitminimierung
    - Implizites Verfahren
    - Präkonditionierte Krylov-Unterraum-Verfahren
      [M. '98, M., Witzel '99, M., Voemel 2000]

Bilanzgleichungen

Instationäre, kompressible und dimensionslose Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j} g_j^c(u) = \frac{1}{Re_\infty} \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j} f_j^v(u)$$

Vektor der konservativen Variablen

$$u = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho E)^T$$

Konvektive Flußfunktionen

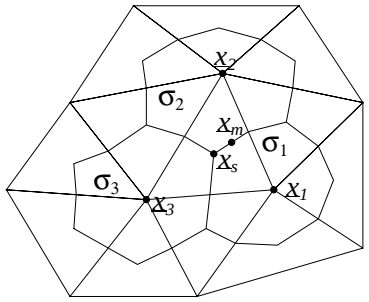
$$g_j^c(u) = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_j v_1 + \delta_1^j p \\ \rho v_j v_2 + \delta_2^j p \\ \rho H v_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2$$

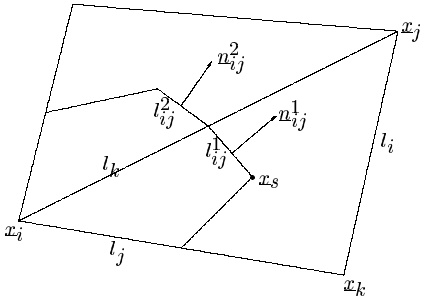
Viskose Flußfunktionen

$$f_j^v(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu S_{1j} \\ \mu S_{2j} \\ \Sigma_{i=1}^{3} \mu S_{ij} v_i + \frac{\mu\kappa}{Pr_\infty} \partial_{x_j} e \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2$$

Finite-Volumen-Verfahren

$$\int_{\sigma(t)} \partial_t u \, dx + \sum_{j=1}^{2} \int_{\sigma(t)} \partial_{x_j} g_j^c(u) \, dx = \frac{1}{Re_\infty} \sum_{j=1}^{2} \int_{\sigma(t)} \partial_{x_j} f_j^v(u) \, dx$$





Zellmittelwerte auf den dualen Kontrollvolumina einer Triangulierung

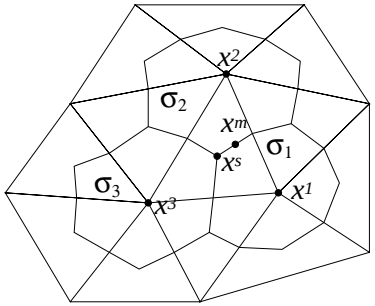
$$u_i = \frac{1}{|\sigma_i(t)|} \int_{\sigma_i(t)} u \, dx$$

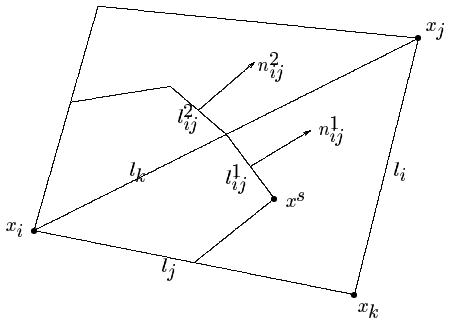
Gaußscher Integralsatz und Reynoldsscher Transportsatz

$$\frac{d}{dt} u_i = \frac{1}{|\sigma_i(t)|} \left(\frac{1}{Re_\infty} \int_{\partial\sigma_i(t)} \sum_{j=1}^{2} f_j^v(u) n_j ds - \int_{\partial\sigma_i(t)} \sum_{j=1}^{2} f_j^c(u) n_j ds \right)$$

$$f_j^c(u) = g_j^c(u) - v_{netz,j} u$$

Diskretisierung der konvektiven Fl¨usse





$$\int_{\partial\sigma_i} \left\{ T^{-1}(n) f_1^c(T(n)u(x,t)) \right\} \, ds = \sum_{j \in N(i)} \sum_{k=1}^{2} \int_{l_{ij}^k} \left\{ T^{-1}(n) f_1^c(T(n)u(x,t)) \right\} \, ds$$

Quadraturformel:

$$\int_{l_{ij}^k} \left\{ T^{-1}(n) f_1^c(T(n)u(x,t)) \right\} \, ds \approx T^{-1}(n_{ij}^k) H(\hat{u}_i(t), \hat{u}_j(t); n_{ij}^k) |l_{ij}^k|$$

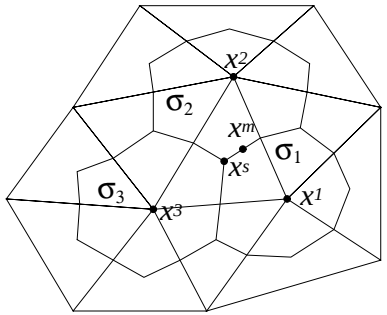
mit $\hat{u}_i, \hat{u}_j$ als die links- bzw. rechtsseitigen konservativen Größen am Mittelpunkt der Kante l_{ij}^k.

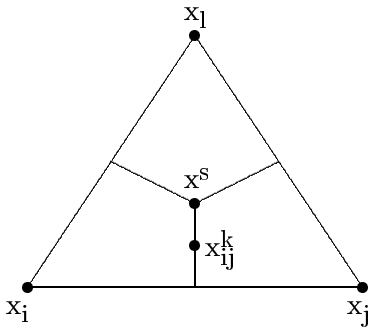
- AUSMDV–Riemannlöser
- TVD–Verfahren 2. Ordnung
  - Flächengemittelter Gradient
  - Barth–Jesperson Limiter
- WENO–Verfahren 2. Ordnung [Friedrich ’98]

Diskretisierung der viskosen Fl¨usse

$$\frac{1}{Re} \sum_{m=1}^{2} \int_{\partial\sigma_i} f_m^v(u) n_m \, ds = \frac{1}{Re} \sum_{j \in N(i)} \sum_{k=1}^{2} \int_{l_{ij}^k} \sum_{m=1}^{2} f_m^v(u) n_m \, ds$$

$$f_j^v(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ v_1\tau_{1j} + v_2\tau_{2j} + \frac{\mu\kappa}{Pr} \partial_{x_j} e \end{pmatrix}$$





Benötigte Größen am Mittelpunkt x_{ij}^k:

- Gradienten für Geschwindigkeitkeit und Temperatur
- Geschwindigkeit und Viskosität

$$\int_{l_{ij}^k} \sum_{m=1}^{2} f_m^v(u) n_m \, ds$$

$$\approx \sum_{m=1}^{2} f_m^v \left(v, \mu, \nabla_x v, \nabla_x T \right) \, n_m \, |l_{ij}^k|$$

Zeitdiskretisierung

- Semidiskrete Form

$$\frac{du}{dt} - F(u) = 0, \quad \mathbb{R}_0^+ \ni t \xrightarrow{u} u(t) \in \mathbb{R}^m, \; F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

- Numerische Integration

$$\begin{aligned} u^{n+1} - u^n &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(u)dt \\ &= \triangle t_n \Theta F(u^{n+1}) + \triangle t_n (1-\Theta) F(u^n) + O\left(\triangle t_n^{p+1}\right) \end{aligned}$$

$$p = 2 \text{ für } \Theta = 1/2 \text{ und } p = 1 \text{ für } \Theta \in [0,1] \setminus 1/2$$

- Differenzenquotient

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t^{n+1}) &= F(u(t^{n+1})) \\ \triangle t_n \frac{du}{dt}(t^{n+1}) &= g_1(\eta, p)(u^{n+1} - u^n) - g_2(\eta, p)(u^n - u^{n-1}) \\ &\quad + O\left(\triangle t_n^{p+1}\right) \\ g_1(\eta, p) &= \begin{cases} \frac{2+\eta}{1+\eta} & \text{für } p = 2 \\ 1 & \text{für } p = 1 \end{cases} \\ g_2(\eta, p) &= \begin{cases} \frac{1}{\eta+\eta^2} & \text{für } p = 2 \\ 0 & \text{für } p = 1 \end{cases} \\ \eta &= \frac{\triangle t_{n-1}}{\triangle t_n} \end{aligned}$$

Implizites Verfahren

- Auswertung der numerischen Flußfunktionen zum fortgeschrittenen Zeitpunkt
- Numerische Charakteristiken umfassen stets die physikalischen Charakteristiken
- Linearisierung der numerischen Flußfunktionen

$$\begin{aligned} &H^{AUSMDV}(u_i^{n+1}, u_j^{n+1}; n_{ij}^k) \\ &\quad = \quad H^{AUSMDV}(u_i^n, u_j^n; n_{ij}^k) \\ &\qquad + \frac{\partial H^{AUSMDV}(u_i^n, u_j^n; n_{ij}^k)}{\partial u_i} \underbrace{\left(u_i^{n+1} - u_i^n\right)}_{=:\triangle u_i^n} + O\left(|\triangle u_i^n|^2\right) \\ &\qquad + \frac{\partial H^{AUSMDV}(u_i^n, u_j^n; n_{ij}^k)}{\partial u_j} \underbrace{\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right)}_{=:\triangle u_j^n} + O\left(|\triangle u_j^n|^2\right) \end{aligned}$$

- Analoges Vorgehen bei den viskosen Flußfunktionen ergibt zusammen mit den turbulenten Quelltermen ein lineares Gleichungssystem

$$A_{ii} \triangle u_i^n + \sum_{j \in N(i)} B_{ij} \triangle u_j^n = b_i \quad , \text{ für } i = 1, \ldots, N := \#\mathcal{N}_h$$

- Zu lösen ist daher ein lineares Gleichungssystem der Form

$$Ay = b$$

Iterative Gleichungssystemlöser

Betrachte $Ay = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär , $y, b \in \mathbb{R}^n$

- **Direkte Methoden**
  - Gauß-Algorithmus (vollständige LU-Zerlegung)
    Cholesky-Zerlegung (LL^T-Zerlegung)
    QR-Zerlegung
  - Warum exakte Lösung ?
  - Rundungsfehler, Speicherplatzbedarf
- **Iterative Methoden**
  - Splitting-Methoden
    - Jacobi-, Gauß-Seidel-, SOR-Verfahren
    - Programmiertechnisch einfach, Konvergenzeigenschaft
  - Krylov-Unterraumverfahren
    - CG, GMRES, CGS, Bi-CGSTAB, TFQMR, QMRCGSTAB
    - Konvergenzeigenschaft, mathematisch und programmiertechnisch anspruchvoller
  - Konditionszahl
    - Vorbehandlung des linearen Gleichungssystems (Präkonditionierung)

Präkonditionierung

Äquivalente Umformung des Gleichungssystems

$$Ay = b$$

in

$$\begin{aligned} P_l\, AP_r\, z &= P_l\, b \\ y &= P_r\, z \end{aligned}$$

zur Verbesserung der Konditionszahl

- Linkspräkonditionierung : $P_l \neq I$

- Rechtspräkonditionierung : $P_r \neq I$

- Beidseitige Präkonditionierung : $P_r \neq I \neq P_l$

Kontrolle des Residuums

Rechtspräkonditionierung

$$r_m^r = b - AP_r\, z_m = b - Ay_m = r_m$$

Linkspräkonditionierung

$$r_m^l = P_l\, b - P_l\, Az_m = P_l\, r_m$$

Präkonditionierung

- Unvollständige LU-Zerlegung
  - Zusätzlicher Speicherplatzbedarf
  - Aufwendige Berechnung
    - Eingefrorene Variante ILU(p)
- Splitting Verfahren (GS, SGS)
  - Kein zusätzlicher Speicherplatzbedarf
  - Keine Berechnung notwendig
- Skalierung (Jacobi et. al.)
  - Kein zusätzlicher Speicherplatzbedarf
  - Schwache Beschleunigung
- Charakteristiken Ansatz
  - Eigenwerte $\lambda_{1,2} = v \cdot n$, $\lambda_{3,4} = v \cdot n + c$
  - Neunummerierung
  - Anwendung eines splitting-basierten Präkonditionierers CHA_{GS}, CHA_{SGS}

Bi-NACA0012 Profil

Ma = 0.55, Anströmwinkel 6°, reibungsfrei
Triangulierung: 26632 Dreiecke, 13577 Punkte

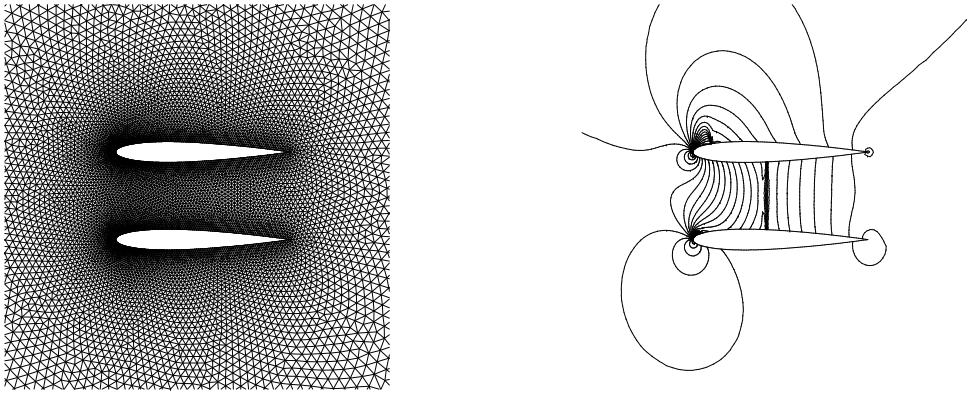


Abb.: Partielle Ansicht der Triangulierung für das Bi-NACA0012 Profil und Dichteverteilung

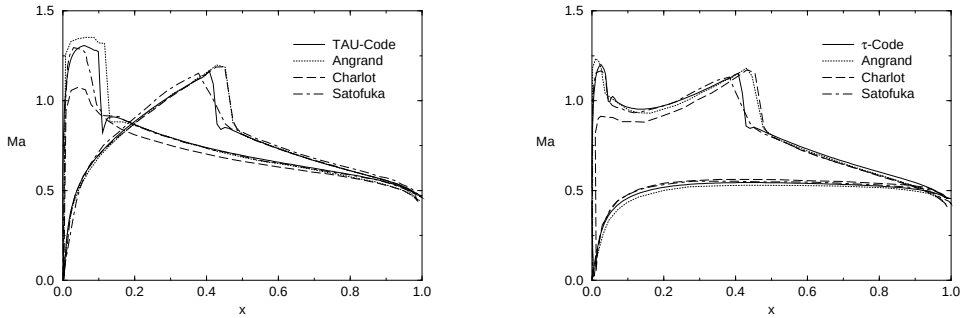


Abb.: Verteilung der Mach-Zahl auf der Oberfläche des oberen (links) und unteren (rechts) Profils

Überschallbrennkammer

Ma = 2.0, Anströmwinkel 0°, reibungsfrei
Triangulierung: 61731 Dreiecke, 31202 Punkte

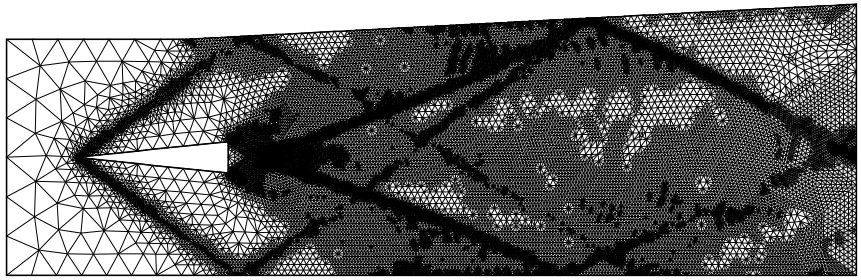


Abb.: Triangulierung der Kanalgeometrie

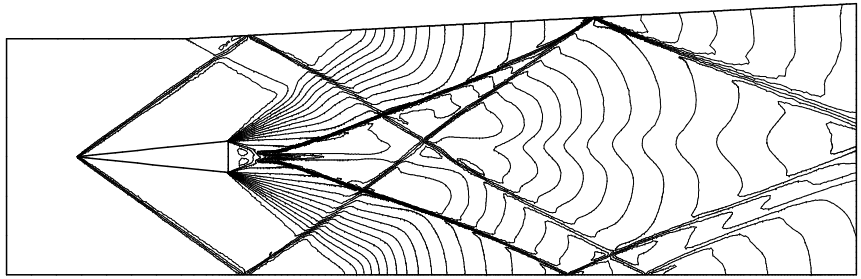


Abb.: Isolinien der Dichte

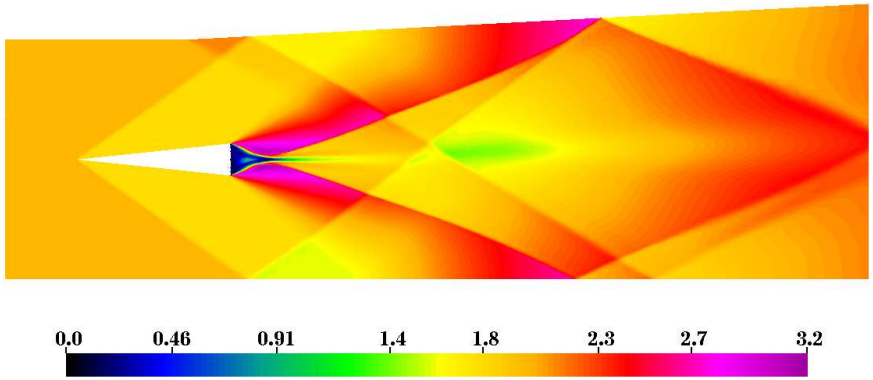
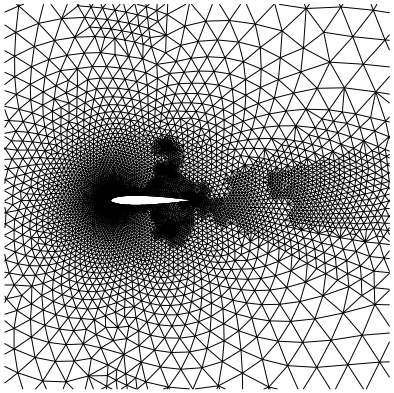


Abb.: Verteilung der Mach-Zahl

NACA0012 Profil

Ma = 0.85, $\alpha = 0^\circ$, reibungsbehaftet
Re = 500, $T_\infty = 273K$, adiabat



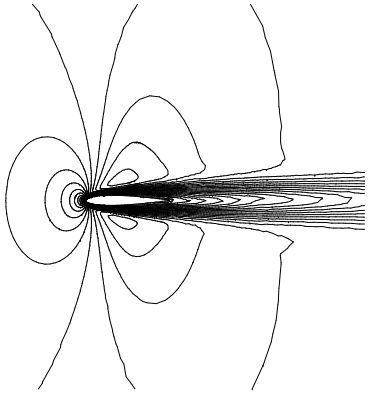


Abb.: Partielle Ansicht der Triangulierung für das NACA0012 Profil und Isolinienbild der Mach-Zahl

C_p-Verteilung

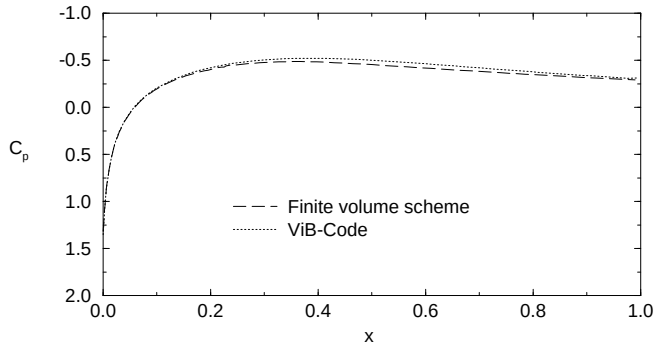


Abb.: C_p-Verteilung des unstrukturierten impliziten DLR-$\mathcal{T}$-Codes und des strukturierten expliziten ViB-Codes

Eine Stoß-Stoß-Wechselwirkung

Ma = 8.03, reibungsbehaftet
Re = 193.750, $T_\infty = 122.1K$, $T_{wall} = 294.4K$, isotherm

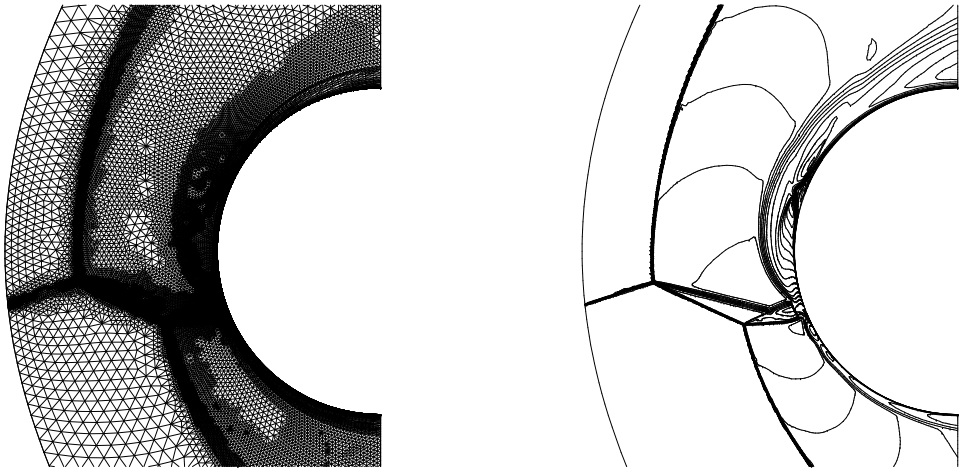


Abb.: Partielle Ansicht der Triangulierung für die Stoß-Stoß-Wechselwirkung und Isolinienbild der Mach-Zahl

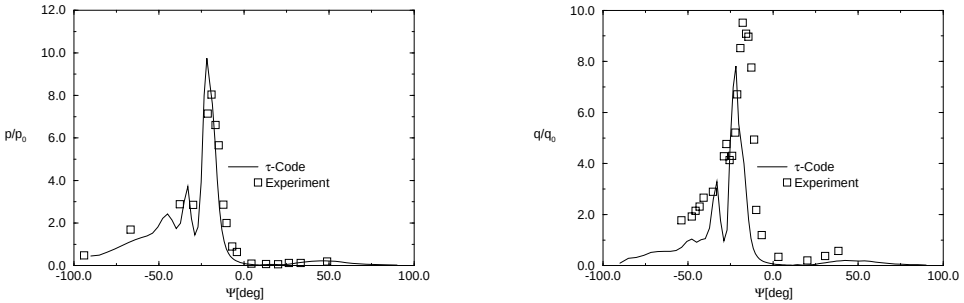


Abb.: Vergleich der Druck- und Wärmeflußverteilung auf der Zylinderoberfläche

Eine Stoß-Stoß-Wechselwirkung

Ma = 8.03, reibungsbehaftet
Re = 193.750, $T_\infty = 122.1K$, $T_{wall} = 294.4K$, isotherm

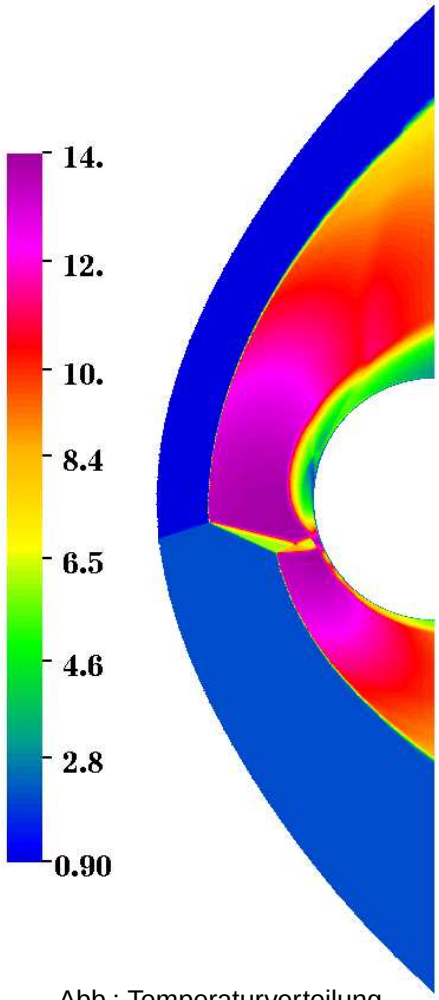


Abb.: Temperaturverteilung

RAE 2822 Profil

Ma = 0.75, Anströmwinkel 3°, reibungsfrei
Triangulierung: 9974 Dreiecke, 5071 Punkte

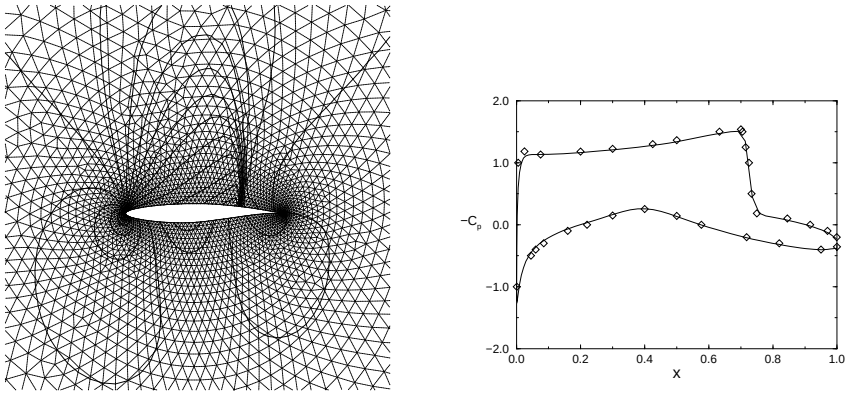


Abb.: Dichteverteilung ung C_p-Verteilung

Explicit scheme	Implicit scheme	
	Scaling	Incomplete LU(5)
100 %	24,36 %	2,86 %

Tab.: Prozentualer Vergleich der Rechenzeiten

SKF1.1 Profil

Ma = 0.65, Anströmwinkel 3°, reibungsfrei
Triangulierung: Dreiecke, Punkte

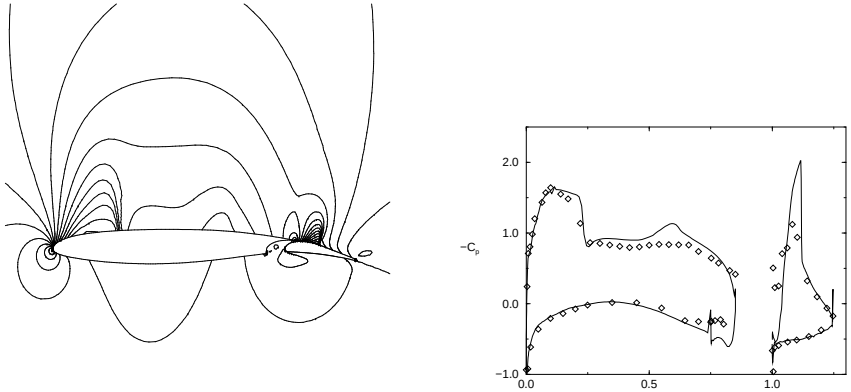


Abb.: Dichteverteilung ung C_p-Verteilung

Explicit scheme	Implicit scheme	
	Scaling	Incomplete LU(5)
100 %	68,58 %	9,97 %

Tab.: Prozentualer Vergleich der Rechenzeiten

Konvergenzanalyse

- Konvergenzkriterium

$$\text{Residuum} = \frac{1}{\triangle t}\sqrt{\sum_{i=1}^{\#\mathcal{N}_h}\frac{(\triangle\rho)_i^2\,|\sigma_i|}{|\Omega|}}$$

- Konvergenzverläufe der ILU-vorkonditionierten Gleichungssystemlöser

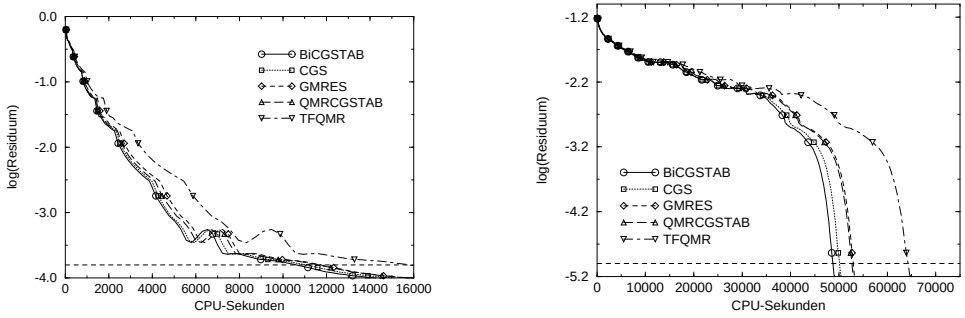


Abb.: Bi-NACA0012 Profil (links) und Überschallbrennkammer (rechts)

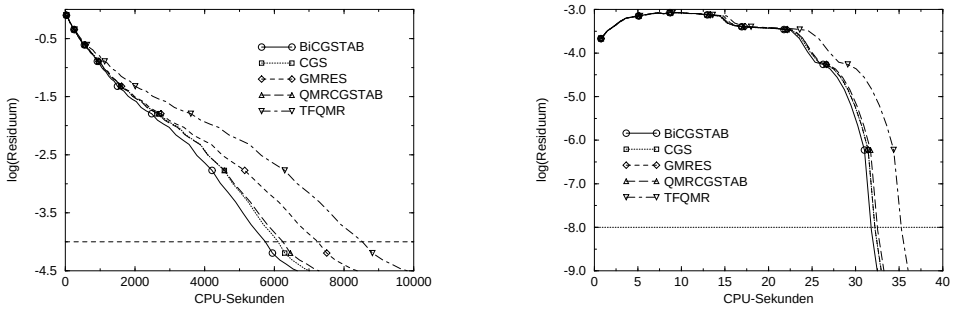
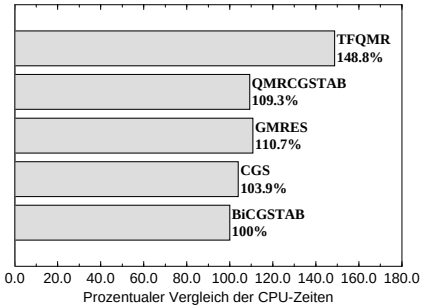
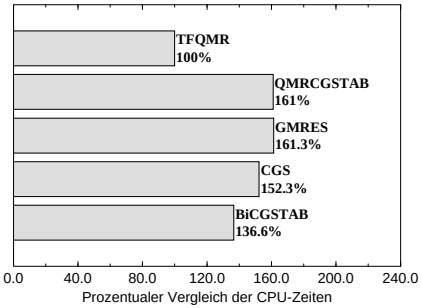


Abb.: NACA0012 Profil (links)
und Abklingverhalten homogener Turbulenz (rechts)

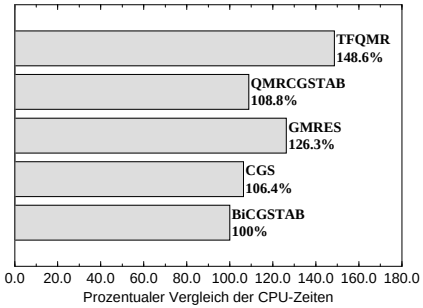
Konvergenzanalyse

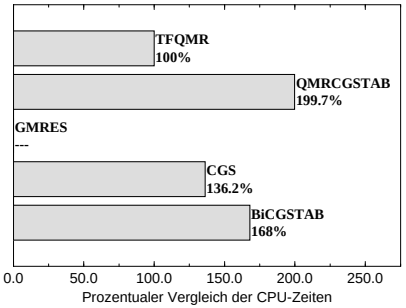
- Bi-NACA0012 Profi l



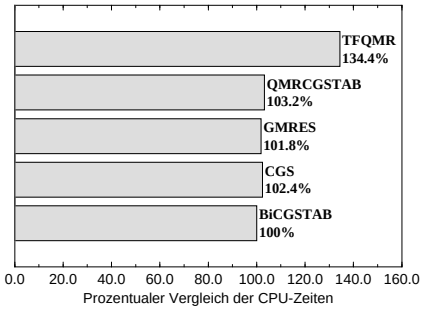


- NACA0012 Profi l

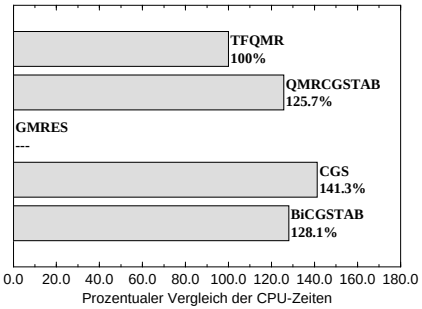




- Laminare Plattengrenzschicht: Re = $6 \cdot 10^6$, Ma = 5.0



Unvollständige LU-Zerlegung



Skalierung

Präkonditioniertes Bi-CGSTAB

Choose $z_0 \in \mathbb{R}^n$ and $\varepsilon > 0$

$r_0 = p_0 := P_l b - P_l A P_r \, z_0$

$\rho_0 := (r_0, r_0)_2 \quad j := 0$

While $\|r_j\|_2 > \varepsilon$

$v_j := P_l A P_r \, p_j$

$\alpha_j := \frac{\rho_j}{(v_j, r_0)_2}$

$s_j := r_j - \alpha_j v_j$

$t_j := P_l A P_r \, s_j$

$\omega_j := \frac{(t_j, s_j)_2}{(t_j, t_j)_2}$

$z_{j+1} := z_j + \alpha_j p_j + \omega_j s_j$

$r_{j+1} := s_j - \omega_j t_j$

$\rho_{j+1} := (r_{j+1}, r_0)_2$

$\beta_j := \frac{\alpha_j}{\omega_j} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j}$

$p_{j+1} := r_{j+1} + \beta_j \, (p_j - \omega_j v_j)$

$j := j + 1$

$y_j = P_r z_j$

Modifiziete Bi-CGSTAB Methode

Choose $y_0 \in \mathbb{R}^n$ and $\varepsilon > 0$

$r_0 = p_0 := b - A \, y_0 \, , \; r_0^P = p_0^P := P_L \, r_0$

$\rho_0^P := \left(r_0^P, r_0^P\right)_2 \quad j := 0$

While $\|r_j\|_2 > \varepsilon$

$\hat{v}_j := A \, P_R \, p_j^P \, , \; v_j^P := P_L \, \hat{v}_j$

$\alpha_j^P := \frac{\rho_j^P}{\left(v_j^P, r_0^P\right)_2}$

$\hat{s}_j := r_j - \alpha_j^P \hat{v}_j \, , \; s_j^P := P_L \hat{s}_j$

$\hat{t}_j := A \, P_R \, s_j^P \, , \; t_j^P := P_L \, \hat{t}_j$

$\omega_j^P := \frac{\left(t_j^P, s_j^P\right)_2}{\left(t_j^P, t_j^P\right)_2}$

$y_{j+1} := y_j + \alpha_j^P P_R \, p_j^P + \omega_j^P P_R \, s_j^P$

$r_{j+1} := \hat{s}_j - \omega_j^P \hat{t}_j$

$r_{j+1}^P := s_j^P - \omega_j^P t_j^P$

$\rho_{j+1}^P := \left(r_{j+1}^P, r_0^P\right)_2$

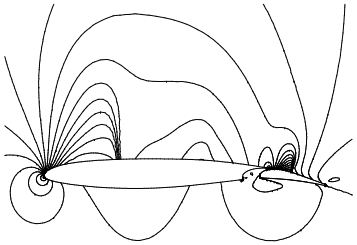
$\beta_j^P := \frac{\alpha_j^P}{\omega_j^P} \frac{\rho_{j+1}^P}{\rho_j^P}$

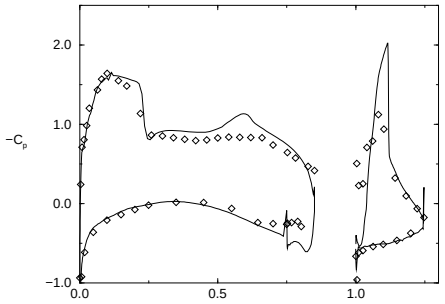
$p_{j+1}^P := r_{j+1}^P + \beta_j^P \left(p_j^P - \omega_j^P v_j^P\right)$

$j := j + 1$

SKF 1.1 two element airfoil

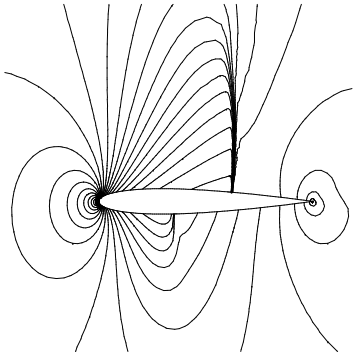
Ma = 0.65, $\alpha = 3.0°$

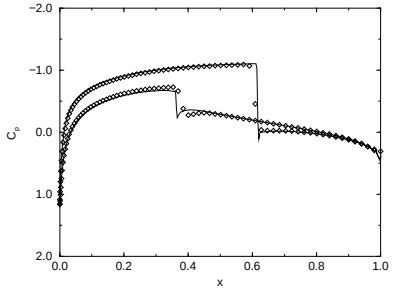




NACA0012 Profil

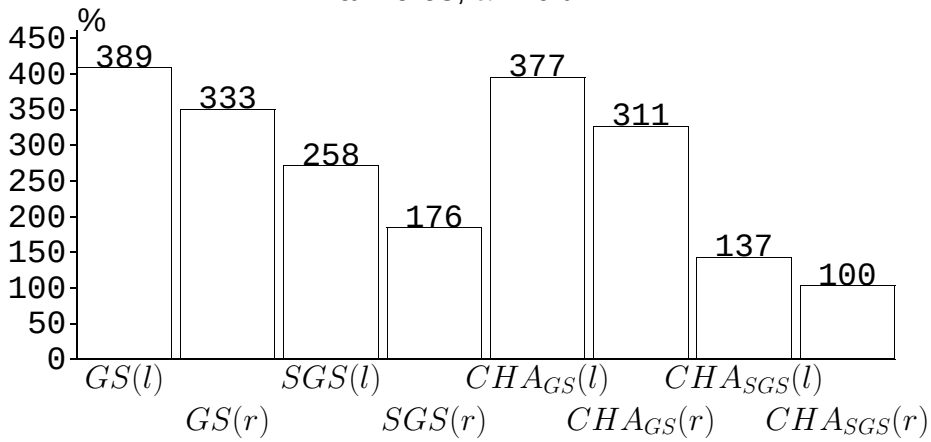
Ma = 0.85, $\alpha = 1.25°$

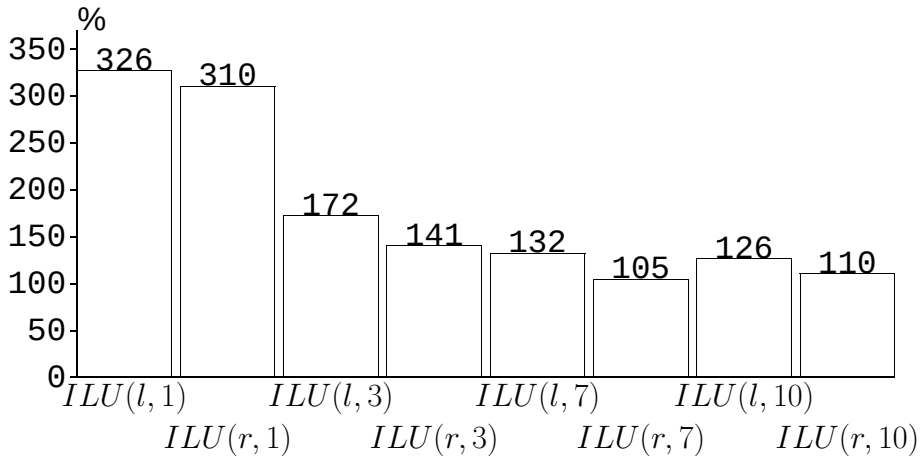




SKF 1.1 two element airfoil

Ma = 0.65, $\alpha = 3.0°$

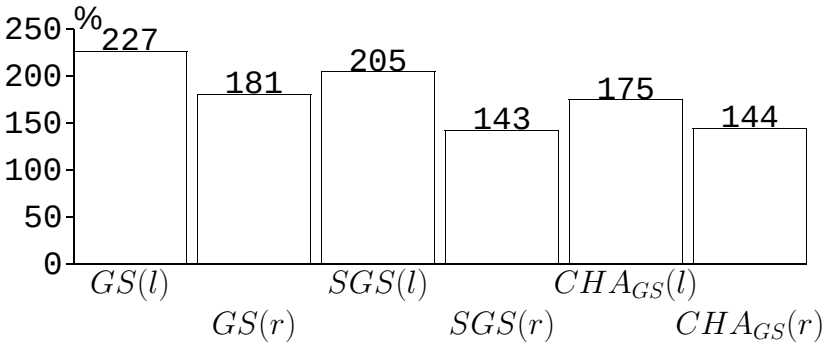


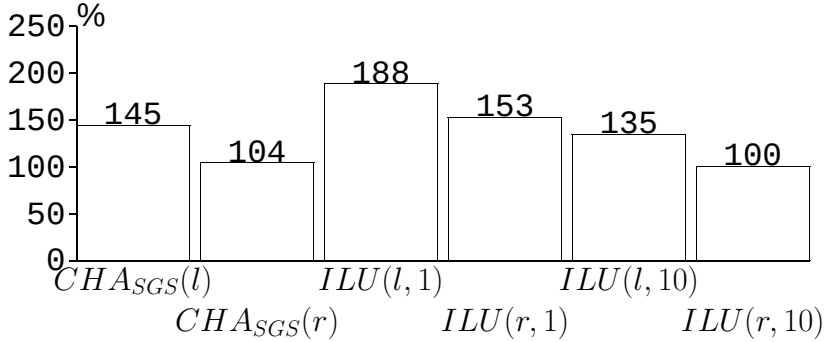


$D_1(r)$	$D_2(r)$	$D_\infty(r)$	$D_{Jac}(r)$	$D_{Jac}(l)$
1038 %	953 %	992 %	438 %	514 %

NACA0012 Profil

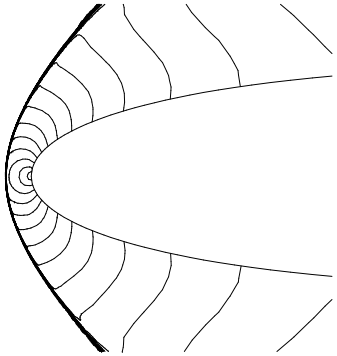
Ma = 0.85, $\alpha = 1.25°$

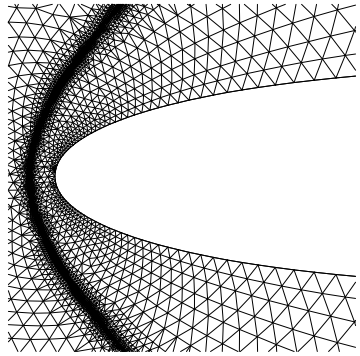




NACA0012 Profil

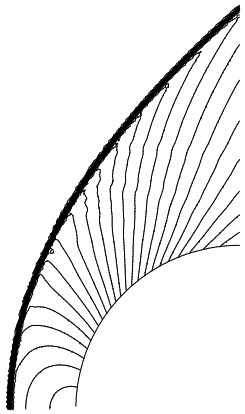
Ma = 3.0, $\alpha = 0°$

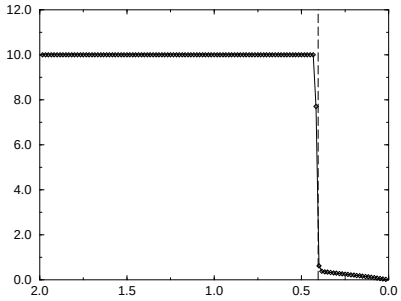




Zylinder

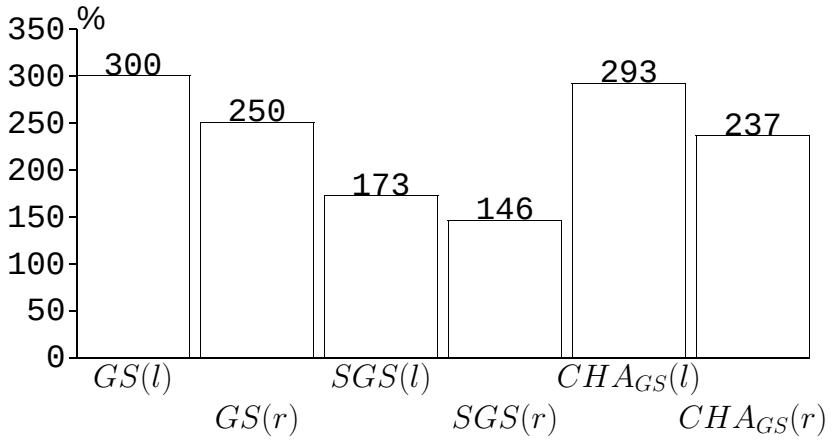
Ma = 10.0, $\alpha = 0°$

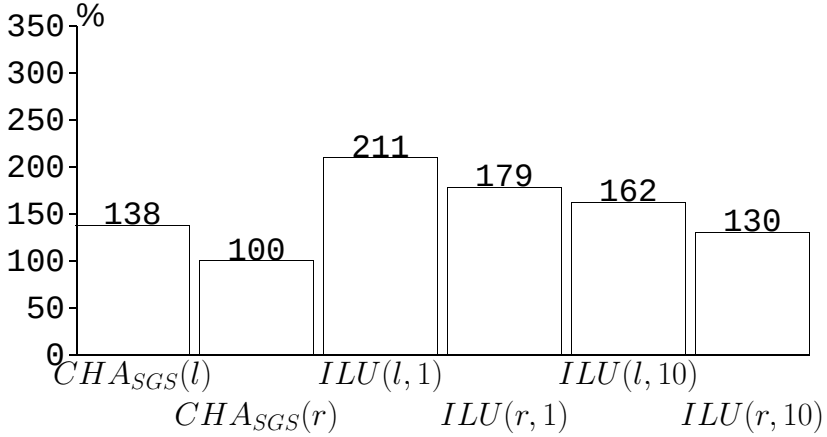




NACA0012 Profil

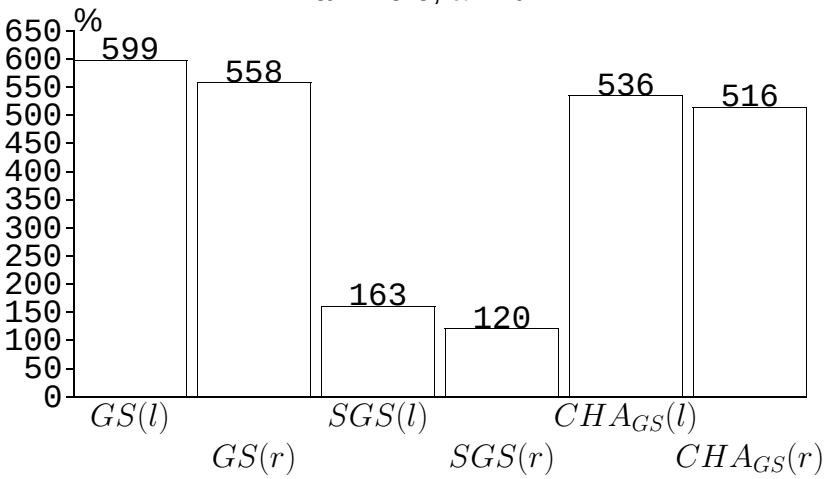
Ma = 3.0, $\alpha = 0°$

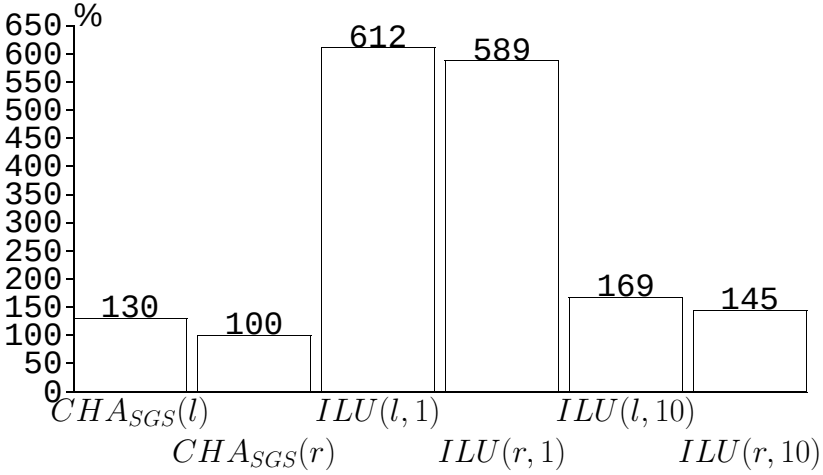




Zylinder

Ma = 10.0, $\alpha = 0°$





Testfall

Schwingendes Profil

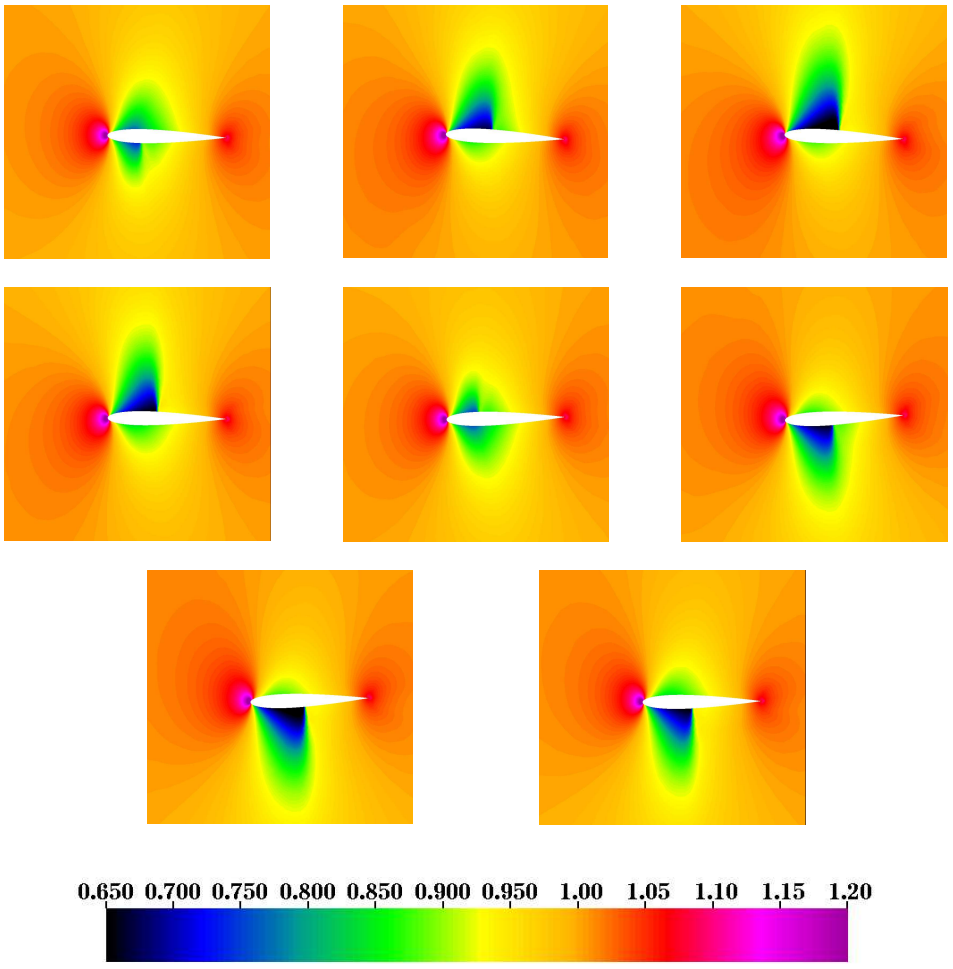
Instationär – Reibungsfrei

Profil	:	**NACA0012**
Mach-Zahl der Anströmung	:	0.755
Ruheanstellwinkel	:	$0.016°$
Amplitude	:	$2.51°$
Frequenz	:	0.1628
Anzahl der Netzpunkte	:	7141
Anzahl der Dreiecke	:	14005

Schwingendes NACA0012 - Profil

Ma = 0.755, $\alpha = 0.016° + 2.51°\sin kt, k = 0.1628$, reibungsfrei

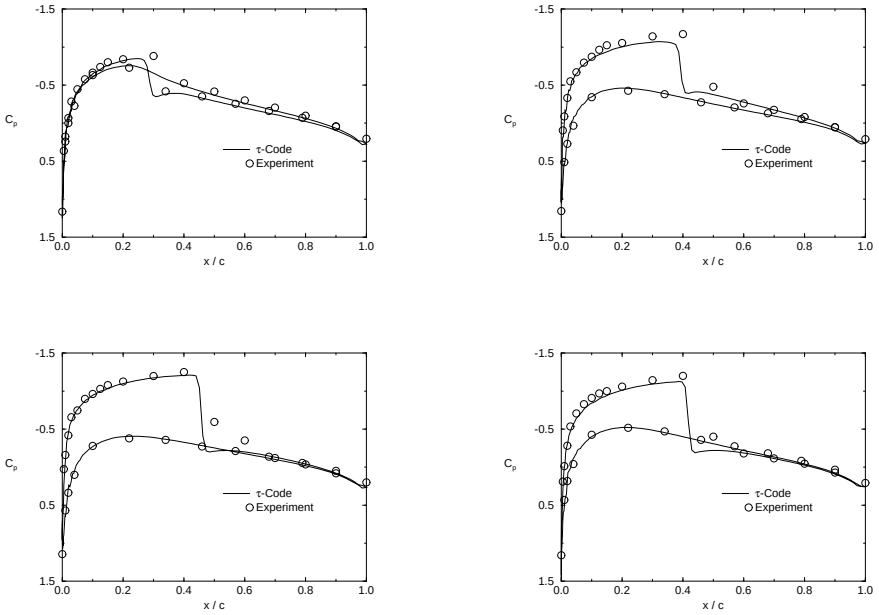
Dichte-Verteilung



Schwingendes NACA0012 - Profil

Ma = 0.755, $\alpha = 0.016° + 2.51°\sin kt, k = 0.1628$, reibungsfrei

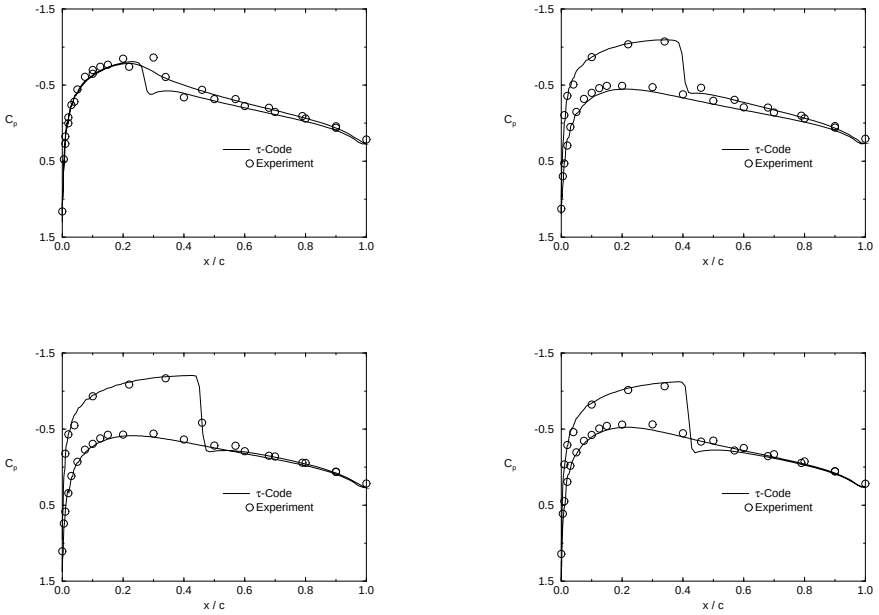
C_p-Verteilung



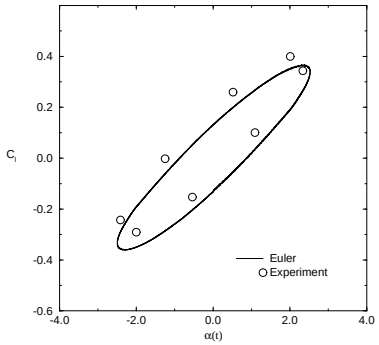
Schwingendes NACA0012 - Profil

Ma = 0.755, $\alpha = 0.016° + 2.51°\sin kt, k = 0.1628$, reibungsfrei

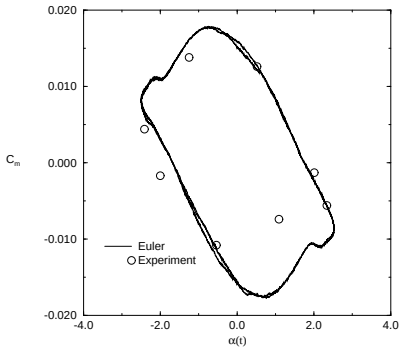
C_p-Verteilung



Auftriebsbeiwert



Momentenbeiwert



Zusammenfassung

- **Navier-Stokes-Gleichungen**
- **Finite-Volumen-Verfahren**
- **AUSMDV-Riemannlöser für die konvektiven Flüsse**
- **Zentrales Verfahren für die viskosen Flüsse**
- **Iterative Gleichungssystemlöser (BiCGSTAB)**
- **Präkonditionierer (ILU(r,p),** $\mathrm{CHA}_{\mathrm{SGS}}$**(r))**
- **Resultate**
  - sehr gute Ergebnisse bei reibungsfreien Testfällen für bewegte und unbewegte Netze
  - sehr gute Ergebnisse bei den reibungsbehafteten Testfällen
- **Einsatz impliziter Zeitdiskretisierungen**
  - Stationäre Strömungsfelder
  - Instationäre Strömungen kleiner Mach-Zahl
  - Instationäre Strömungen ohne sehr schnelle starke Stoßfronten
  - Anpassung der CFL-Zahl