Übungen zum Kompaktkurs

Iterative Gleichungssystemlöser und parallele Algorithmen

Montag, 7. Oktober 2002

Aufgabe 1: (Splitting-Methoden)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & 14 \\ 7 & 50 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \in I\!R^+ \setminus \left\{ \frac{49}{25} \right\}.$$

Berechnen Sie die Lösung $\boldsymbol{x} \in I\!R^2$ mit dem Gesamt- und Einzelschrittverfahren. Studieren Sie hierbei das Konvergenzverhalten für $a = 1/2, 1, 2, 10, 100$ und beliebigem Startvektor $\boldsymbol{x}_0 \in I\!R^2$.

(a) Läßt sich die Konvergenzeigenschaft durch Variation des Startvektors verbessern?

(b) Läßt sich die Konvergenzgeschwindigkeit durch Relaxation des Gauß-Seidel-Verfahrens erhöhen?

Aufgabe 2: (Splitting-Methoden)
Bestimmen Sie für das System

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Spektralradien der Iterationsmatrizen für das Gesamt- und Einzelschrittverfahren. Zeigen Sie, daß die Matrix konsistent geordnet ist und bestimmen Sie den optimalen Relaxationsparameter für das Einzelschrittverfahren. Veranschaulichen Sie graphisch den Verlauf des Spektralradius der Iterationsmatrix des Einzelschrittverfahrens in Abhängigkeit vom Relaxationsparameter ω.
Berechnen Sie ausgehend vom Startvektor $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ die Lösung des Gleichungssystems mit dem Einzelschritt-Relaxationsverfahrens für

(a) $\omega = 1$

(b) $\omega = \omega_0$ (ω_0 optimaler Relaxationsparameter)

(c) $\omega = \omega_0 \pm \epsilon$, ϵ klein.

Vergleichen Sie hierbei die Verläufe für $\boldsymbol{x}_n$ und $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n-1}\|_\infty$ bezüglich ω.

Hinweis: Für alle, die die Spektralradien nicht berechnen wollen
$\left(\rho\left(M_J\right) = \sqrt{41/100},\ \rho\left(M_{GS}\right) = 41/100\right)$

Aufgabe 3: (Verfahren des steilsten Abstiegs, CG-Verfahren)
Programmieren Sie das Verfahren des steilsten Abstiegs und das Verfahren der konjugierten Gradienten. Validieren Sie das Programm anhand der folgenden zwei Beispiele. Betrachten Sie jeweils die Näherungslösungen $\boldsymbol{x}_n$ für $n = 5, 6, 8, 10, 20, 30, \ldots, 100$. Veranschaulichen Sie hierbei stets $\|\boldsymbol{r}_n\|_2$ über n.

Beispiel 1:

$$A = \begin{pmatrix} 168 & 24 & 338 & 27 & 27 & 53 & -7 & 80 \\ 24 & 178 & 169 & 72 & 53 & -103 & 17 & 80 \\ 338 & 169 & 1177 & 192 & -62 & -108 & -48 & 180 \\ 27 & 72 & 192 & 125 & 2 & -24 & 36 & 180 \\ 27 & 53 & -62 & 2 & 222 & 70 & 46 & 100 \\ 53 & -103 & -108 & -24 & 70 & 178 & 34 & 100 \\ -7 & 17 & -48 & 36 & 46 & 34 & 34 & 100 \\ 80 & 80 & 180 & 180 & 100 & 100 & 100 & 400 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 229 \\ 129 \\ 790 \\ -214 \\ 106 \\ -276 \\ -216 \\ -600 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$A = \begin{pmatrix} 71 & -1 & 23 & -36 & 70 & 60 \\ -1 & 161 & 102 & 33 & 40 & -120 \\ 23 & 102 & 135 & 18 & 110 & -60 \\ -36 & 33 & 18 & 35 & -22 & -60 \\ 70 & 40 & 110 & -22 & 148 & 24 \\ 60 & -120 & -60 & -60 & 24 & 144 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 187 \\ 194 \\ 360 \\ -45 \\ 432 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (CG-Verfahren)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$-u_{xx} - u_{yy} - au_x - bu = 0 \ \text{ auf } \ \Omega = (0,1) \times (0,1)$$

mit der Randbedingung

$$u = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega.$$

Diskretisieren Sie das Gebiet $\overline{\Omega}$ durch $(x_i, y_j) = (i \cdot h, j \cdot h)$ mit $h = 1/100$, $i, j = 0, \ldots, 100$ und approximieren Sie die auftretenden Differentialquotienten durch zentrale Differenzenquotienten gemäß

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \\ u_{yy}(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} \\ u_x(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten ($\|r_n\|_2$ über n) des CG-Verfahrens für das resultierende Gleichungssystem

$$Au = 0 \in \mathbb{R}^N, \quad N = 99^2$$

mit

$$u = (u_{1,1}, \ldots, u_{1,N}, u_{2,1}, \ldots, u_{2,N}, \ldots, u_{N,N})^T$$

bei stark variierenden Parametern $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und dem Startvektor $u_0 = (1, \ldots, 1)^T$. Beispielsweise

$$(a,b) = (0,0), (a,b) = (0,10), (a,b) = (10,0), (a,b) = (10,10), \ \text{ etc.}$$

Welche Eigenschaften hat die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ in Abhängigkeit von a und b?